解説

三角形の形状と定義された式の値との関係について考察する問題である。図形に対する条件は二等辺三角形，正三角形であることで，問題なく把握できる基本的なものであるから，三角関数の加法定理，合成などの計算処理が中心のテーマとなる。

考察１，２，３についてはそれぞれ仮定と結論を明確にして考えることが肝心である。考察１では加法定理を用いた計算から s，t それぞれの値を求めることになる。

考察２では三角関数の合成により式を整理し，α，β の値がいくらのときに $s=t=0$ であるのかを求める。$\theta=\frac{\pi}{4}$ のときは，α と β を，$\alpha=\frac{11}{12}\pi$，$\beta=\frac{19}{12}\pi$ と定めると，$s=t=0$ となることがわかる。この条件では，二等辺三角形PQRは特に正三角形であることを確認しておくこと。

考察３では $s=t=0$ を仮定して，そのときの三角形の形状を求める。式の展開，三角関数の相互関係，加法定理を用いて計算，整理をしていく。

これらの考察から得られたことを正確に読み解いて，(3)を答えよう。

第２問 —— 微分・積分

〔１〕 標準 《２次関数の増減と極大・極小》

(1)　$a=1$ のとき　$f(x)=(x-1)(x-2)$

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

の両辺を x で微分すると

$F'(x)=f(x)$　つまり　$F'(x)=(x-1)(x-2)$

となるので，$F'(x)=0$ となるのは $x=1$，2 のときであり，$F(x)$ の増減は次のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$F'(x)\ (f(x))$	+	0	−	0	+
$F(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

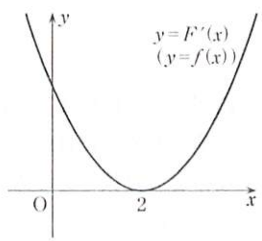
したがって，$F(x)$ は $x=\boxed{2}$ で極小になる。→ア

(2)　$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

の両辺を x で微分すると

$F'(x)=f(x)$　つまり　$F'(x)=(x-a)(x-2)$

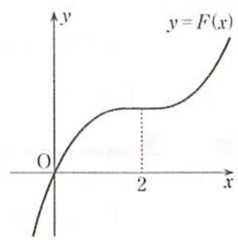
$F(x)$ がつねに増加するための条件は，すべての実数 x に対して，$F'(x)$ つまり $f(x)$ がつねに0以上であることである。それは，右のグラフのように，$f(x)=(x-a)(x-2)$ において，$a=\boxed{2}$ →イ のときの，$f(x)=(x-2)^2$ となることである。



さらに，$F(0)=\int_0^0 f(t)\,dt$ となり，上端と下端の値が一致することから

$F(0)=\boxed{0}$　→ウ

これは $y=F(x)$ のグラフが原点 (0, 0) を通ることを示す。よって，$y=F(x)$ のグラフは，原点 (0, 0) を通り，単調に増加することになるので，右のグラフのようになり，$a=2$ のとき，$F(2)$ の値は正となる。$\boxed{①}$　→エ



(3)　$a>2$ とする。

$$G(x)=\int_b^x f(t)\,dt=\Big[F(x)\Big]_b^x=F(x)-F(b)\quad\cdots\cdots①$$

よって，$y=G(x)$ のグラフは，$y=F(x)$ のグラフを y 軸 $\boxed{①}$ →オ 方向に $-F(b)$ $\boxed{③}$ →カ だけ平行移動したものと一致する。

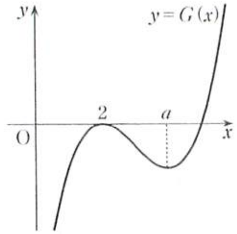
$$G'(x)=\{F(x)-F(b)\}'=F'(x)$$

となるので，$F'(x)=(x-a)(x-2)$ において，$F'(x)=0$ となるのは $x=2$，a のときであり，$a>2$ より，$G(x)$ の増減は次のようになる。

x	$\cdots$	2	$\cdots$	a	$\cdots$
$G'(x)$	＋	0	－	0	＋
$G(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

したがって，$G(x)$ は $x=\boxed{2}$ で極大になり，$x=\boxed{a}$ で極小になる。

→キ，ク



$G(b)$ の値を求めるには，①の定積分 $G(x)$ において $x=b$ とし，上端と下端の値を一致させればよいから

$$G(b)=F(b)-F(b)=\boxed{0}\quad →ケ$$

となる。

$b=2$ のとき，上の $G(x)$ の増減表で極大値は $G(2)=0$ なので，曲線 $y=G(x)$ と x 軸との共有点の個数は $\boxed{2}$ 個である。→コ

参考　$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ において，$f(t)$ の不定積分の一つを $P(t)$ とおくと

$$F(x)=\Big[P(t)\Big]_0^x=P(x)-P(0)$$

両辺を x で微分する。$f(t)$ の不定積分の一つを $P(t)$ と定義しているので，t と x の違いがあるだけで，$P(x)$ を x で微分した $P'(x)$ は $f(x)$ に戻る。$P(0)$ は定数なので，定数を x で微分すると 0 になる。よって

$$F'(x)=f(x)-0=f(x)$$

となる。

したがって，$F'(x)=(x-a)(x-2)$ となる。

このような手順を踏んでもよいが，このプロセスが理解できていたら，スマートに $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ を x で微分したいところである。

解説

本問では $f(x)$，$F(x)$，$G(x)$ といろいろな関数を扱うことになるので，それぞれの関係を正しく読み取り，上手に誘導に乗って解き進めていこう。問題を通して，計算だけに頼るのではなく，グラフを描くこともうまく織り交ぜながら確認していくとスムーズな流れで解答できる。

(1)・(2)　$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ より，$F'(x)=f(x)$ の関係を得る。$f(x)=(x-a)(x-2)$ とわかっているので，$F'(x)$ の符号をみることで $F(x)$ の増減がわかる。

(3)　$G(x)=\int_b^x f(t)\,dt$ より，$G(x)=F(x)-F(b)$ の関係を得る。$F(b)$ が定数であることから，両辺を x で微分して $G'(x)=F'(x)$ となる。

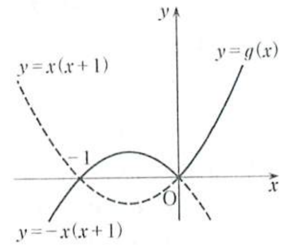
〔２〕 標準 《絶対値を含む関数のグラフと図形の面積》

$$|x|=\begin{cases} x & (x\geqq 0 \text{ のとき}) \\ -x & (x<0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

であるから

$$g(x)=\begin{cases} x(x+1) & (x\geqq 0 \text{ のとき}) \\ -x(x+1) & (x<0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

曲線 $y=g(x)$ は右図のようになる。



点 P$(-1,\ 0)$ は曲線 $y=g(x)$ 上の点である。$g(x)$ は $x=-1$ のとき，$x<0$ の場合にあたるので

$$g(x)=-x(x+1)=-x^2-x$$

であるから，このとき

$$g'(x)=-2x-1$$

よって　$g'(-1)=-2(-1)-1=\boxed{1}$　→サ

したがって，曲線 $y=g(x)$ 上の点Pにおける接線の傾きは1であり，その接線の方程式は

$$y-0=1\{x-(-1)\}\quad より\quad y=x+1$$