第２問 （必答問題）（配点 30）

(1) 座標平面上で，次の二つの２次関数のグラフについて考える。

$y = 3x^2 + 2x + 3$ ……………………………… ①

$y = 2x^2 + 2x + 3$ ……………………………… ②

①，②の２次関数のグラフには次の**共通点**がある。

共通点

- y 軸との交点の y 座標は $\boxed{ア}$ である。
- y 軸との交点における接線の方程式は $y = \boxed{イ}x + \boxed{ウ}$ である。

次の⓪～⑤の２次関数のグラフのうち，y 軸との交点における接線の方程式が $y = \boxed{イ}x + \boxed{ウ}$ となるものは $\boxed{エ}$ である。

$\boxed{エ}$ の解答群

⓪ $y = 3x^2 - 2x - 3$	① $y = -3x^2 + 2x - 3$
② $y = 2x^2 + 2x - 3$	③ $y = 2x^2 - 2x + 3$
④ $y = -x^2 + 2x + 3$	⑤ $y = -x^2 - 2x + 3$

a，b，c を０でない実数とする。

曲線 $y = ax^2 + bx + c$ 上の点 $\left(0,\ \boxed{オ}\right)$ における接線を ℓ とすると，その方程式は $y = \boxed{カ}x + \boxed{キ}$ である。

接線 ℓ と x 軸との交点の x 座標は $\dfrac{\boxed{クケ}}{\boxed{コ}}$ である。

a，b，c が正の実数であるとき，曲線 $y = ax^2 + bx + c$ と接線 ℓ および直線 $x = \dfrac{\boxed{クケ}}{\boxed{コ}}$ で囲まれた図形の面積を S とすると

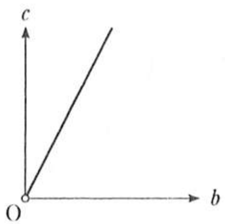
$$S = \frac{ac^{\boxed{サ}}}{\boxed{シ}\,b^{\boxed{ス}}} \quad \text{……………………………… ③}$$

である。

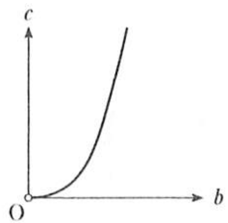
③において，$a = 1$ とし，S の値が一定となるように正の実数 b，c の値を変化させる。このとき，b と c の関係を表すグラフの概形は $\boxed{セ}$ である。

$\boxed{セ}$ については，最も適当なものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

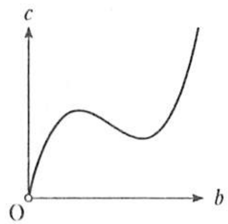
⓪



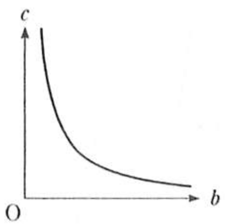
①



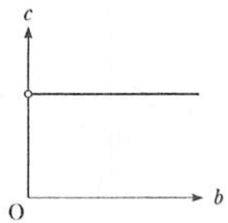
②



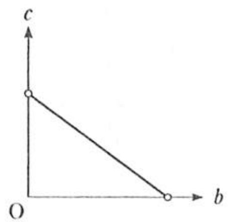
③



④



⑤



(2) 座標平面上で，次の三つの3次関数のグラフについて考える。

$y = 4x^3 + 2x^2 + 3x + 5$ ………………………… ④

$y = -2x^3 + 7x^2 + 3x + 5$ ………………………… ⑤

$y = 5x^3 - x^2 + 3x + 5$ ………………………… ⑥

④，⑤，⑥の3次関数のグラフには次の**共通点**がある。

共通点

- y 軸との交点の y 座標は $\boxed{\text{ソ}}$ である。
- y 軸との交点における接線の方程式は $y = \boxed{\text{タ}}\,x + \boxed{\text{チ}}$ である。

a，b，c，d を0でない実数とする。

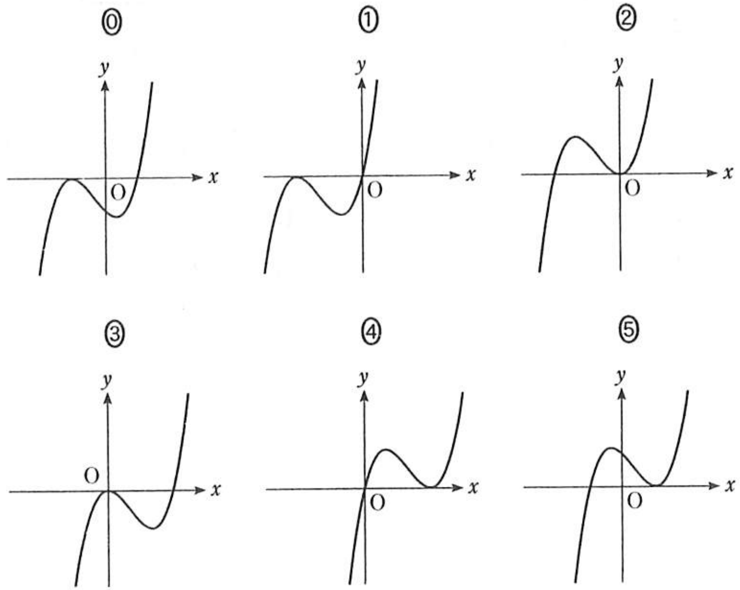
曲線 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 上の点 $\left(0,\ \boxed{\text{ツ}}\right)$ における接線の方程式は $y = \boxed{\text{テ}}\,x + \boxed{\text{ト}}$ である。

次に，$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$，$g(x) = \boxed{\text{テ}}\,x + \boxed{\text{ト}}$ とし，$f(x) - g(x)$ について考える。

$h(x) = f(x) - g(x)$ とおく。a，b，c，d が正の実数であるとき，$y = h(x)$ のグラフの概形は $\boxed{\text{ナ}}$ である。

$y = f(x)$ のグラフと $y = g(x)$ のグラフの共有点の x 座標は $\dfrac{\boxed{\text{ニヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ と $\boxed{\text{ノ}}$ である。また，x が $\dfrac{\boxed{\text{ニヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ と $\boxed{\text{ノ}}$ の間を動くとき，$|f(x) - g(x)|$ の値が最大となるのは，$x = \dfrac{\boxed{\text{ハヒフ}}}{\boxed{\text{ヘホ}}}$ のときである。

$\boxed{\text{ナ}}$ については，最も適当なものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。



(2)　$\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2$ に $f(x)=\dfrac{2^x+2^{-x}}{2}$，$g(x)=\dfrac{2^x-2^{-x}}{2}$ を代入した場合は，$2^x\times 2^{-x}=2^0=1$ に注意して

$$\left(\frac{2^x+2^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{2^x-2^{-x}}{2}\right)^2=\frac{2^{2x}+2+2^{-2x}}{4}-\frac{2^{2x}-2+2^{-2x}}{4}=\frac{2+2}{4}=1$$

となる。また

$$f(x)g(x)=\frac{2^x+2^{-x}}{2}\times\frac{2^x-2^{-x}}{2}=\frac{(2^x)^2-(2^{-x})^2}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{2^{2x}-2^{-2x}}{2}=\frac{1}{2}g(2x)$$

と計算して $g(2x)=2f(x)g(x)$ を導いてもよい。

(3)　本問は，式(A)～(D)のなかに，「つねに成り立つ式」があるかどうかを調べる問題である。$f(x)$ も $g(x)$ も実数全体で定義されているので，「つねに成り立つ式」では，α，β にどんな実数を代入しても成り立つはずである。式が成り立たないような実数が少なくとも一つ見つかれば，その式は「つねに成り立つ式」ではないと判定できる。

花子さんの「β に何か具体的な値を代入して調べてみたら」をヒントにして，〔解答〕では $\beta=0$ とおいてみたが，$\alpha=\beta$ とおいてもできる。

(A)は，$f(0)=2f(\alpha)g(\alpha)$ となるが，(1)より，$f(0)=1$ で，(2)より，$2f(\alpha)g(\alpha)=g(2\alpha)$ であるから，$g(2\alpha)=1$ となる。

(C)は，$g(0)=\{f(\alpha)\}^2+\{g(\alpha)\}^2$ となるが，(1)より，$g(0)=0$．したがって，$f(\alpha)=g(\alpha)=0$ となる。

(D)は，$g(2\alpha)=f(\alpha)g(\alpha)-g(\alpha)f(\alpha)=0$ となる。

いずれも $g(x)$ が定数関数となって，矛盾が生じてしまう。

第２問　標準　微分・積分《接線，面積，３次関数のグラフ》

(1)　$y=3x^2+2x+3$　……①

$y=2x^2+2x+3$　……②

①，②はいずれも $x=0$ のとき $y=3$ であるから，①，②の２次関数のグラフと y 軸との交点の y 座標はいずれも $\boxed{3}$ →ア である。

①，②よりそれぞれ $y'=6x+2$，$y'=4x+2$ が得られ，いずれも $x=0$ のとき $y'=2$ であるから，①，②の２次関数のグラフと y 軸との交点における接線の方程式はいずれも $y=\boxed{2}x+\boxed{3}$ →イ，ウ である。

問題の⓪～⑤の２次関数のグラフのうち，y 軸との交点における接線の方程式が $y=2x+3$（点 $(0,\ 3)$ を通り，傾きが２の直線）となるものは $\boxed{④}$ →エ である。なぜなら，点 $(0,\ 3)$ を通るものは，③，④，⑤で，それぞれ $y'=4x-2$，$y'=-2x+2$，$y'=-2x-2$ であるから，$x=0$ のとき $y'=2$ となるものは，④のみである。

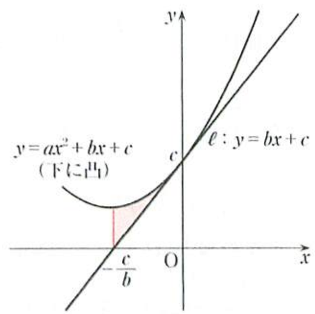
曲線 $y=ax^2+bx+c$（a，b，c は０でない実数）上の点 $(0,\ \boxed{c})$ →オ における接線 ℓ の方程式は，$y'=2ax+b$（$x=0$ のとき $y'=b$）より

$$y-c=b(x-0)\qquad\therefore\quad y=\boxed{b}x+\boxed{c}\quad\text{→カ，キ}$$

である。

接線 ℓ と x 軸との交点の x 座標は，$0=bx+c$ より，$\dfrac{\boxed{-c}}{\boxed{b}}$ →クケ，コ である。

a，b，c が正の実数であるとき，曲線 $y=ax^2+bx+c$ と接線 ℓ および直線 $x=-\dfrac{c}{b}$ (<0) で囲まれた図形の面積 S は，右図より



$$\begin{aligned}S&=\int_{-\frac{c}{b}}^{0}\{(ax^2+bx+c)-(bx+c)\}dx\\&=\int_{-\frac{c}{b}}^{0}ax^2dx=\left[\frac{a}{3}x^3\right]_{-\frac{c}{b}}^{0}\\&=0-\frac{a}{3}\left(-\frac{c}{b}\right)^3\\&=\frac{ac^{\boxed{3}}}{\boxed{3}\,b^{\boxed{3}}}\quad\text{→サ，シ，ス}\quad\cdots\cdots③\end{aligned}$$

である。

③において，$a=1$ とすると，$S=\dfrac{c^3}{3b^3}$ であり，S の値が一定となるように正の実数 b，c の値を変化させるとき，b と c の関係を表す式は

$c^3=3Sb^3$　より　$c=\sqrt[3]{3S}\,b$

となり，$\sqrt[3]{3S}$ は正の定数であるから，このグラフは，原点を通り正の傾きをもつ直線の $b>0$，$c>0$ の部分である。

よって，問題のグラフの概形⓪～⑤のうち，最も適当なものは $\boxed{⓪}$ →セ である。

(2)　$y=4x^3+2x^2+3x+5$　……④

$y=-2x^3+7x^2+3x+5$　……⑤

$y=5x^3-x^2+3x+5$　……⑥

④，⑤，⑥はいずれも $x=0$ のとき $y=5$ であるから，④，⑤，⑥の３次関数のグラフと y 軸との交点の y 座標は $\boxed{5}$ →ソ である。

④，⑤，⑥よりそれぞれ $y'=12x^2+4x+3$，$y'=-6x^2+14x+3$，$y'=15x^2-2x+3$ が得られ，いずれも $x=0$ のとき $y'=3$ であるから，④，⑤，⑥の３次関数のグラフと y 軸との交点における接線の方程式は $y=\boxed{3}x+\boxed{5}$ →タ，チ である。

曲線 $y=ax^3+bx^2+cx+d$（a，b，c，d は０でない実数）上の点 $(0,\ \boxed{d})$ →ツ における接線の方程式は，$y'=3ax^2+2bx+c$（$x=0$ のとき $y'=c$）より

$$y-d=c(x-0)\qquad \therefore\quad y=\boxed{c}x+\boxed{d}\quad →テ，ト$$

である。

次に，$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，$g(x)=cx+d$ に対し

$$h(x)=f(x)-g(x)=ax^3+bx^2$$

を考える。a，b，c，d が正の実数であるとき，これは

$$y=h(x)=ax^2\left(x+\frac{b}{a}\right)$$

と変形でき，方程式 $h(x)=0$ を解くことで，この関数のグラフと x 軸との交点の x 座標は，０と $-\dfrac{b}{a}$（<0）であることがわかる。さらに，$x=0$ は方程式 $h(x)=0$ の重解になっているので，この関数のグラフは $x=0$ で x 軸に接していることもわかる。したがって，$y=h(x)$ のグラフの概形として⓪～⑤のうち最も適当なものは $\boxed{②}$ →ナ である。

$y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフの共有点の x 座標は，方程式 $f(x)=g(x)$ すなわち $h(x)=0$ の実数解で与えられるから，上で調べた通り

$\dfrac{\boxed{-b}}{\boxed{a}}$ →ニヌ，ネ と $\boxed{0}$ →ノ である。

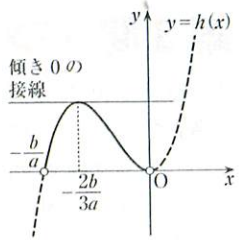
$-\dfrac{b}{a}<x<0$ を満たす x に対して，$|f(x)-g(x)|=|h(x)|$ の値が最大となる x の値は，次図より，$h'(x)=0$ $\left(-\dfrac{b}{a}<x<0\right)$ の解である。それは

$$h'(x)=3ax^2+2bx=x(3ax+2b)=0$$

より

$$x=\frac{\boxed{-2b}}{\boxed{3a}}\quad →ハヒフ，ヘホ$$

である（$x=0$ は不適）。



解説

(1)　関数 $y=f(x)$ のグラフと y 軸との交点の y 座標（y 切片という）は $f(0)$ である。

> **ポイント**　接線の方程式
>
> 関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式は
>
> $y-f(a)=f'(a)(x-a)$

⓪～⑤の２次関数のグラフから正しいものを一つ選ぶ問題は，その次の一般的な問題を先に解く方が時間の節約になる。

関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸との交点の x 座標（x 切片という）は，方程式 $f(x)=0$ の解で与えられる。

面積 S の計算では，図を描くことが第一歩である。$a>0$ であるから，２次関数のグラフは下に凸になる。定積分の計算は容易である。

A，B が実数ならば，$A^3=B^3 \Longleftrightarrow A=B$ である。これは，

$A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)=(A-B)\left\{\left(A+\dfrac{1}{2}B\right)^2+\dfrac{3}{4}B^2\right\}$ からわかる。

(2)　曲線 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 上の点 $(0,\ d)$ における接線の方程式が

$y=cx+d$

となることは，(1)の経験から，計算なしに求まるであろう。

$h(x)=ax^3+bx^2$（$a>0$，$b>0$）のグラフは，y 切片が $h(0)=0$，x 切片は，$h(x)=ax^3+bx^2=0$ より $x=0$，$-\dfrac{b}{a}$（<0）であるから，$y=h(x)$ のグラフの概形は，①と②にしぼられる。$h'(x)=3ax^2+2bx=0$ を解くと，$x=0$，$-\dfrac{2b}{3a}$（<0）となり，$x=0$ で極値をもつことがわかる。このことから②であるとすることもできる。

$|f(x)-g(x)|=|h(x)|$ の値が最大となる x の値を求める問題では，グラフ②を見て考える。