2023年度　数式処理演習　最終個別試験問題

cc by Shigeto R. Nishitani, 2023/12/21実施

- file: ~/symbolic_math/exams_23/23_final_ans.ipynb
- make problem: pick_works_from_ans 23_final_ans.ipynb -1 '' '24, 34'

以下の問題を python で解き，LUNA へ提出せよ．LUNA へは ipynb と pdf 形式の２種類を提出すること．

問１　微積分

正規分布(15 点)

次の正規分布関数(ガウス函数)

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

を

$$\mu, \sigma = 0, 1$$
$$\mu, \sigma = 0, 2$$
$$\mu, \sigma = -1, 2$$

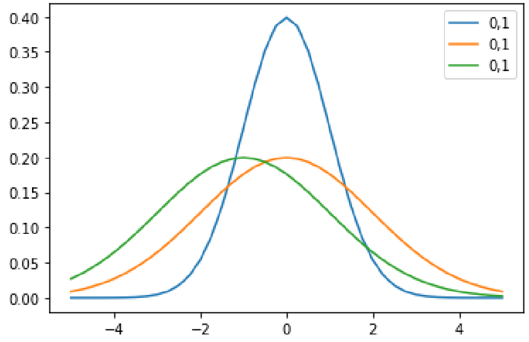
について，　x=np.linspace(-5, 5, 41)でプロットせよ．

In [1]:
```
%matplotlib inline
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def gauss(x, mu, s):
    return 1/np.sqrt(2*np.pi*s**2) * np.exp( -(x-mu)**2/(2*s**2) )

x=np.linspace(-5, 5, 41)
plt.plot(x, gauss(x, 0, 1),label='0,1')
plt.plot(x, gauss(x, 0, 2),label='0,1')
plt.plot(x, gauss(x, -1,2),label='0,1')
plt.legend()
```

Out[1]: <matplotlib.legend.Legend at 0x7f8ff0ca74f0>



ガウス函数の積分(15 点)

$$\mu, \sigma = 0, 1$$

の正規分布から無作為標本 x を取ると、平均μ からのずれが $\pm 1\sigma$ 以下の範囲に x が含まれる確率は 68.27%, $\pm 2\sigma$ 以下だと 95.45%, さらに $\pm 3\sigma$ だと 99.73% となることを確かめよ．

In [2]:
```
from sympy import *
x = symbols('x')

g=1/sqrt(2*pi*1**2) * exp( -(x-0)**2/(2*1**2) )
print("sigma: ", 1, ", 積分値: " ,integrate(g, (x, -1,1)).evalf())
print("sigma: ", 2, ", 積分値: " ,integrate(g, (x, -2, 2)).evalf())
print("sigma: ", 3, ", 積分値: " ,integrate(g, (x, -3,3)).evalf())
```

```
sigma:  1 , 積分値:  0.682689492137086
sigma:  2 , 積分値:  0.954499736103642
sigma:  3 , 積分値:  0.997300203936740
```

問２　線形代数

2(a) 標準偏差(15 点)

次のデータ

```
x = [0.1, -0.2, 0.4]
```

に対して，平均(average)μ と標準偏差(standard deviation)σ

$$\mu = \frac{1^{\mathrm{T}} x}{n}$$
$$\sigma = \frac{||x - \mu 1||}{\sqrt{n}}$$

をベクトルの内積を使って求めよ． ただし，nはベクトルのサイズを， 1は全ての要素が1のベクトルを， $||x||$はx のユークリッドノルムを意味する．

さらに，xの要素の2乗平均平方根(root-mean-square, RMS)は，

$$\mathrm{rms}(x) = \sqrt{\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}} = \frac{||x||}{\sqrt{n}}$$

で求められる． rms(x)の2乗（2乗平均）は， 平均値(avg(x))の2乗と標準偏差(std(x))の2乗の和

$$\mathrm{rms}(x)^2 = \mathrm{avg}(x)^2 + \mathrm{std}(x)^2$$

で表されることを確かめよ．

In [3]:

```
import numpy as np

xdata = np.array([0.1, -0.2, 0.4])
nn = xdata.size
one = np.full(nn, 1.0)
avg = one.transpose().dot(xdata)/nn
print("avg: ", avg)
dx = xdata - avg*one
std = sqrt(dx.transpose().dot(dx))/np.sqrt(nn)
print("std: ", std)
```

```
avg:  0.10000000000000002
std:  0.244948974278318
```

In [4]:

```
xdata = np.array([0.1, -0.2, 0.4])
print("rms^2: ", xdata.transpose().dot(xdata)/nn)
print("avg^2+std^2: ", avg**2+std**2)
```

```
rms^2:  0.07000000000000002
avg^2+std^2:  0.0700000000000000
```

グラムシュミット(15 点)

グラム・シュミット法のアルゴリズムは次のとおりである．

入 力 : n次元ベクトル$a_1 \dots a_k$

$i = 1 \dots k$について

- step1. 直交化: $\tilde{q}_i = a_i - (q_1^{\mathrm{T}} a_i)q_1 - \cdots - (q_{i-1}^{\mathrm{T}} a_i)q_{i-1}$.
- step2. 線形従属かどうかのテスト:$\tilde{q}_i = 0$ ならば終了．
- step3. 正規化: $q_i = \tilde{q}_i / ||\tilde{q}_i||$

以下のa_1, a_2, a_3に対してグラム・シュミット法を適用し， 正規直交基底を作成せよ．

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

また， q_1, q_2, q_3が互いに直交していることを確認せよ．

In [5]:

```
import numpy as np

a1 = np.array([1,0,0])
a2 = np.array([1,1,0])
a3 = np.array([1,1,1])
q1h=a1
q1=q1h/q1h.transpose().dot(q1h)
print("q1: ", q1)
q2h=a2-(q1.transpose().dot(a2))*q1
q2=q2h/q2h.transpose().dot(q2h)
print("q2: ", q2)
q3h=a3-(q1.transpose().dot(a3))*q1-(q2.transpose().dot(a3))*q2
q3=q3h/q3h.transpose().dot(q3h)
print("q3: ", q3)
print("q1.q2: ", q1.dot(q2))
print("q2.q3: ", q2.dot(q3))
print("q3.q1: ", q3.dot(q1))
```

```
q1:  [1. 0. 0.]
q2:  [0. 1. 0.]
q3:  [0. 0. 1.]
q1.q2:  0.0
q2.q3:  0.0
q3.q1:  0.0
```

問3 センター試験(20 点)

2021年度：数学II・B/本試験(第一日程) 改

２次関数の場合

特定(specific)の場合

座標平面上で， 次の二つの2 次関数のグラフについて考える．

$$y = 3x^2 + 2x + 3 \dots (1)$$
$$y = 2x^2 + 2x + 3 \dots (2)$$

(1)， (2)の2次関数のグラフには次の共通点がある．

共通点

- y 軸との交点のy 座標は$\boxed{\text{ア}}$である．
- y 軸との交点における接線の方程式は $y = \boxed{\text{イ}}x + \boxed{\text{ウ}}$ である．

次の1. ~ 6.の2次関数のグラフのうち， y 軸との交点における接線の方程式 が $y = \boxed{\text{イ}}x + \boxed{\text{ウ}}$ となるものは $\boxed{\text{エ}}$ である．

$\boxed{\text{エ}}$ の解答群

1. $y = 3x^2 - 2x - 3$
2. $y = -3x^2 + 2x - 3$
3. $y = 2x^2 + 2x - 3$
4. $y = 2x^2 - 2x + 3$
5. $y = -x^2 + 2x + 3$
6. $y = -x^2 - 2x - 3$

In [6]:

```
from sympy import *
x = symbols('x')
```

```
y1=3*x**2+2*x+3
bb = y1.subs(x, 0)
print("ア: ",bb)
```

```
ア: 3
```

In [7]:

```
aa = diff(y1,x).subs(x,0)
print("イ: ",aa)
print("ウ: ",bb)
aa*x+bb
```

```
イ: 2
ウ: 3
```

Out[7]: $2x+3$

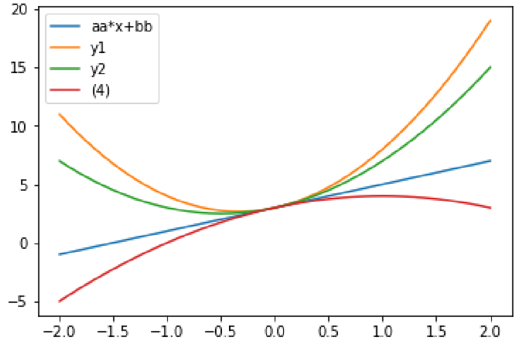
In [8]:

```
%matplotlib inline
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

xx=np.linspace(-2,2, 41)
plt.plot(xx, aa*xx+bb,label='aa*x+bb')
plt.plot(xx,3*xx**2+2*xx+3,label='y1')
plt.plot(xx, 2*xx**2+2*xx+3,label='y2')
plt.plot(xx, -xx**2+2*xx+3,label='(4)')
plt.legend()
```

Out[8]:

```
<matplotlib.legend.Legend at 0x7f8fe21139a0>
```



一般的(general)な場合

a, b, cを0でない実数とする.

曲線$y = ax^2 + bx + c$ 上の点(0, $\boxed{オ}$)に おける接線をlとすると， その方程式は

$y = \boxed{カ}x + \boxed{キ}$である.

接線lとx軸との交点のx 座標は $\dfrac{\boxed{クケ}}{\boxed{コ}}$ である.

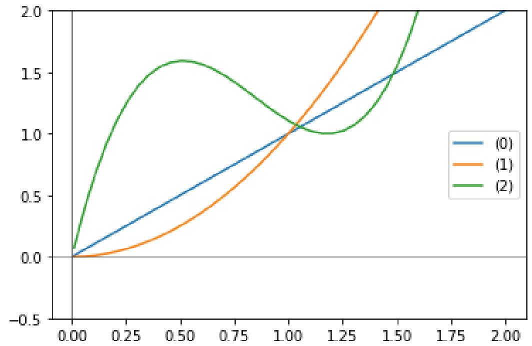
a, b, cが正の実数であるとき， 曲線$y = ax^2 + bx + c$と接線lおよび 直線$x = \dfrac{\boxed{クケ}}{\boxed{コ}}$ で囲まれた図形の面積をSとすると

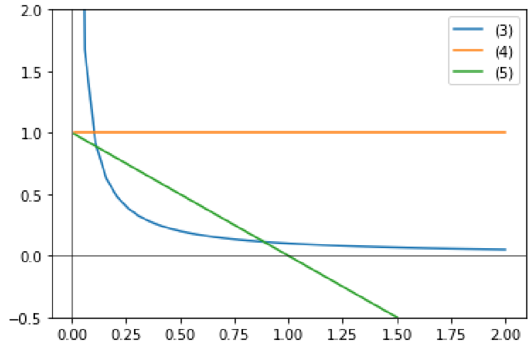
$$S = \frac{ac^{\boxed{サ}}}{\boxed{シ}b^{\boxed{ス}}}$$

である.

(3)において，$a = 1$とし， Sの値が一定となるように正の実数b, cの値を変化させる． このとき，bとcの関係を表すグラフの概形は $\boxed{セ}$である.

$\boxed{セ}$については， 最も適当なものを， 次の (0)から(5)のうちから一つ選べ.





In [9]:

```
from sympy import *
a,b, c, x = symbols('a,b,c x')

y1=a*x**2+b*x+c
b2 = y1.subs(x, 0)
print("オ: ",b2)
```

```
オ: c
```

In [10]:

```
a2 = diff(y1,x).subs(x,0)
print("カ: ",a2)
print("キ: ",b2)
y2=a2*x+b2
print(y2)
```

```
カ: b
キ: c
b*x + c
```

In [11]:
```
print("クケコ: ", solve(a2*x+b2,x))
```
クケコ: [-c/b]

In [12]:
```
SS=integrate(y1-y2,(x, -c/b, 0))
```

In [13]:
```
SS
```

Out[13]: $\frac{ac^3}{3b^3}$

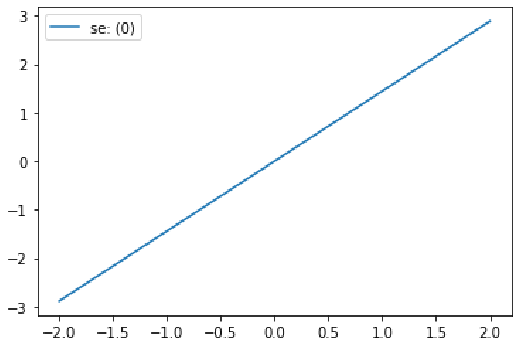
In [14]:
```
print("サシス: ", SS)
```
サシス: a*c**3/(3*b**3)

In [15]:
```
s1=solve(SS.subs(a,1)-1,c)
s1[0]
```

Out[15]: $\sqrt[3]{3}b$

In [16]:
```
bb=np.linspace(-2,2, 41)
plt.plot(bb, 3**(1/3)*bb, label='se: (0)')
plt.legend()
```

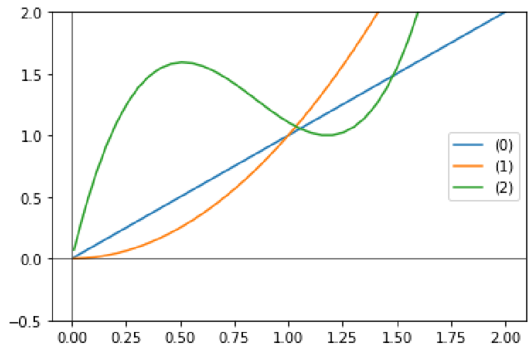
Out[16]: <matplotlib.legend.Legend at 0x7f8ff1fcafd0>

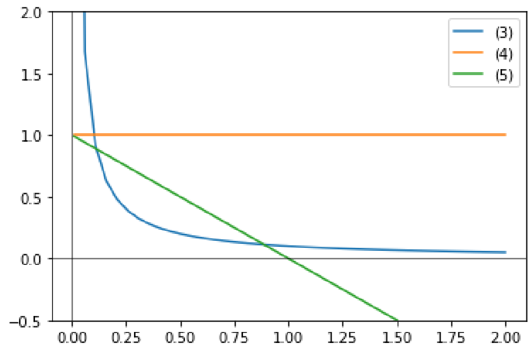


In [17]:
```
%matplotlib inline
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def show_plot(plt):
    plt.axhline(0, color='black', linewidth=.5)
    plt.axvline(0, color='black', linewidth=.5)
    plt.ylim(-0.5, lim)
    plt.legend()
    plt.show()
def func(x):
    return 4*x*(x-1)**2+1

lim = 2
xx=np.linspace(0.01, lim, 41)
dx=0.5
plt.plot(xx, xx,label='(0)')
plt.plot(xx,xx**2,label='(1)')
plt.plot(xx, func(xx-0.1796520430),label='(2)')
show_plot(plt)
plt.plot(xx, 0.1/xx,label='(3)')
yy=np.linspace(1, 1, 41)
plt.plot(xx, yy,label='(4)')
plt.plot(xx, -xx+1,label='(5)')
show_plot(plt)
```





3次関数の場合

特定(specific)の場合

座標平面上で，次の三つの3次関数のグラフについて考える．

$$y = 4x^3 + 2x^2 + 3x + 5 \ldots (4)$$
$$y = -2x^3 + 7x^2 + 3x + 5 \ldots (5)$$
$$y = 5x^3 - x^2 + 3x + 5 \ldots (6)$$

(4)，(5)，(6)の3次関数のグラフには次の共通点がある．

共通点

- y 軸との交点のy 座標は$\boxed{ソ}$ である．
- y 軸との交点における接線の方程式は $y = \boxed{タ}x + \boxed{チ}$ である．

In [18]:
```
x = symbols('x')
y1=4*x**3+2*x**2+3*x+5
```

```
bb = y1.subs(x, 0)
print("ツ: ",bb)
```

ツ: 5

In [19]:
```
aa = diff(y1,x).subs(x,0)
print("タチ: ",aa*x+bb)
```

タチ: 3*x + 5

一般的(general)な場合

a, b, c, d を0でない実数とする.

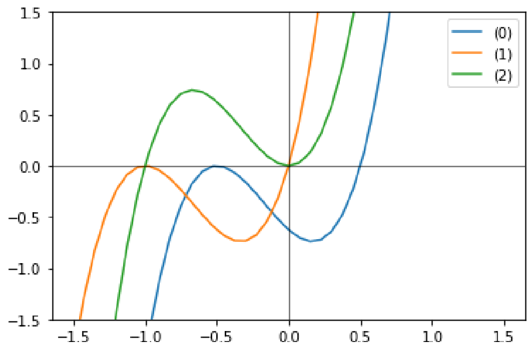
曲線$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 上の点(0, $\boxed{ツ}$) における接線の方程式は $y = \boxed{テ}x + \boxed{ト}$ である.

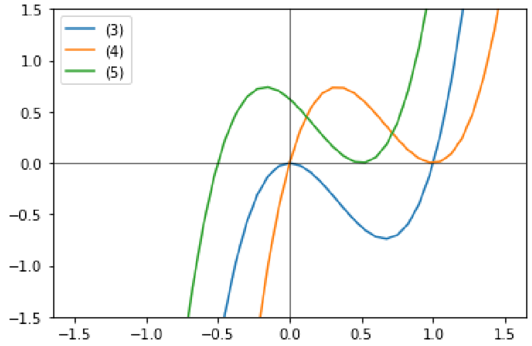
次に, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, g(x) = \boxed{テ}x + \boxed{ト}$ とし, $f(x) - g(x)$ について考える.

$h(x) = f(x) - g(x)$ とおく. a, b, c, d が正の実数であるとき, $y = h(x)$ のグラフの概形は $\boxed{ナ}$である.

$y = f(x)$ のグラフと$y = g(x)$ のグラフの共有点のx 座標は $\frac{\boxed{ニヌ}}{\boxed{ネ}}$ と $\boxed{ノ}$ である. また, x が $\frac{\boxed{ニヌ}}{\boxed{ネ}}$ と $\boxed{ノ}$ の間を動くとき, $|f(x) - g(x)|$の値が最大となるのは, $x = \frac{\boxed{ハヒフ}}{\boxed{ヘホ}}$のときである.

$\boxed{ナ}$については, 最も適当なものを, 次の(0)~(5)のうちから一つ選べ.





In [20]:
```
a,b,c,d,x = symbols('a b c d x')
y1=a*x**3+b*x**2+c*x+d
bb = y1.subs(x, 0)
print("ツ: ",bb)
```

ツ: d

In [21]:
```
aa = diff(y1,x).subs(x,0)
print("テト: ",aa*x+bb)
```

テト: c*x + d

In [22]:
```
ff = y1
gg = aa*x+bb
hh = ff-gg
print(hh)
```

a*x**3 + b*x**2

In [23]:
```
solve(hh, x)
```

Out[23]: [0, -b/a]

In [24]:
```
s2=solve(diff(hh,x),x)
print(s2)
```

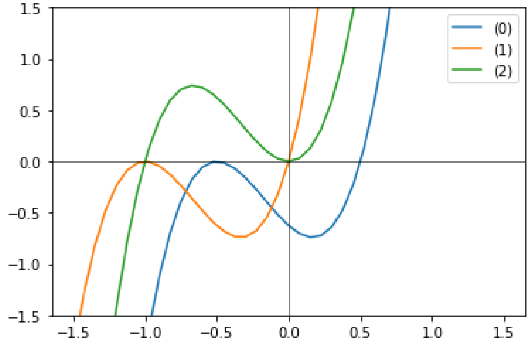
[0, -2*b/(3*a)]

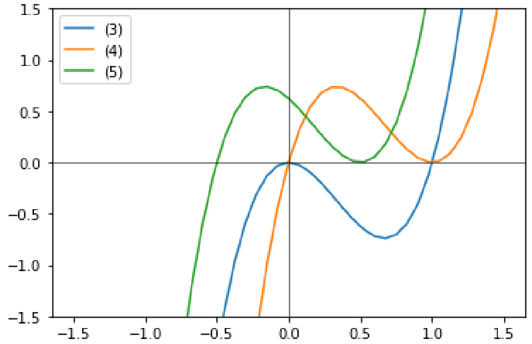
In [25]:
```
%matplotlib inline
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def show_plot(plt):
    plt.axhline(0, color='black', linewidth=.5)
    plt.axvline(0, color='black', linewidth=.5)
    plt.ylim(-lim, lim)
    plt.legend()
    plt.show()
def func(x, x0, x1, x2):
    return 5*(x-x0)*(x-x1)*(x-x2)

lim = 1.5
xx=np.linspace(-lim, lim, 41)
dx=0.5
plt.plot(xx, func(xx, -dx, -dx, dx),label='(0)')
plt.plot(xx, func(xx, -1,-1,0),label='(1)')
plt.plot(xx, func(xx, -1, 0,0),label='(2)')
```

```
show_plot(plt)
plt.plot(xx, func(xx, 0,0,1),label='(3)')
plt.plot(xx, func(xx,0,1,1),label='(4)')
plt.plot(xx, func(xx, -dx, dx, dx),label='(5)')
show_plot(plt)
```





問4 数値改変(20点)

問３において,

$$f(x) = 2.5x^3 + 5.4x^2 + 6.3x + 5.3$$

として,　$|f(x) - g(x)|$の値が最大になるのは,　$x = \dfrac{\boxed{\text{ハヒフ}}}{\boxed{\text{ヘホ}}}$のときであることを,　グラフをプロットして確かめよ.

In [26]:
```
x = symbols('x')
a0, b0, c0, d0 = 2.5, 5.4, 6.3, 5.3
ff=a0*x**3+b0*x**2+c0*x+d0
bb = ff.subs(x, 0)
print("ソ: ",bb)
```

ソ: 5.30000000000000

In [27]:
```
aa = diff(ff,x).subs(x,0)
print("テト: ",aa*x+bb)
```

テト: 6.3*x + 5.3

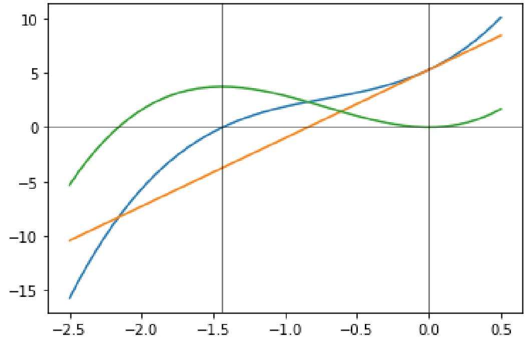
In [28]:
```
y3=-2*b0/(3*a0)
print(y3)
```

-1.4400000000000002

In [29]:
```
x2=np.linspace(-2.5, 0.5, 41)

fx = a0*x2**3+b0*x2**2+c0*x2+d0
plt.plot(x2, fx ,label='(0)')
plt.plot(x2, aa*x2+bb,label='(0)')
plt.plot(x2, fx- (aa*x2+bb),label='(0)')
plt.axhline(0, color='black', linewidth=.5)
plt.axvline(0, color='black', linewidth=.5)
plt.axvline(y3, color='black', linewidth=.5)
```

Out[29]: <matplotlib.lines.Line2D at 0x7f8fd04ca220>



In [ ]: