2023年度　数式処理演習　最終個別試験問題

cc by Shigeto R. Nishitani, 2023/12/21実施

- file: ~/symbolic_math/exams_23/23_final_ans.ipynb
- make problem: pick_works_from_ans 23_final_ans.ipynb -1 '' '24, 34'

以下の問題を python で解き，LUNA へ提出せよ．LUNA へは ipynb と pdf 形式の２種類を提出すること．

問１　微積分

正規分布(15 点)

次の正規分布関数(ガウス函数)

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

を

$$\mu, \sigma = 0, 1$$
$$\mu, \sigma = 0, 2$$
$$\mu, \sigma = -1, 2$$

について，　x=np.linspace(-5, 5, 41)でプロットせよ．

ガウス函数の積分(15 点)

$$\mu, \sigma = 0, 1$$

の正規分布から無作為標本 x を取ると、 平均μ からのずれが $\pm 1\sigma$ 以下の範囲に x が含まれる確率は 68.27%, $\pm 2\sigma$ 以下だと 95.45%, さらに $\pm 3\sigma$ だと 99.73% となることを確かめよ．

問２　線形代数

2(a) 標準偏差(15 点)

次のデータ

```
x = [0.1, -0.2, 0.4]
```

に対して，平均(average)μ と標準偏差(standard deviation)σ

$$\mu = \frac{1^{\mathrm{T}}x}{n}$$
$$\sigma = \frac{||x-\mu 1||}{\sqrt{n}}$$

をベクトルの内積を使って求めよ． ただし，nはベクトルのサイズを， 1は全ての要素が1のベクトルを， $||x||$はx のユークリッドノルムを意味する．

さらに，xの要素の2乗平均平方根(root-mean-square, RMS)は,

$$\mathrm{rms}(x) = \sqrt{\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{n}} = \frac{||x||}{\sqrt{n}}$$

で求められる． rms(x)の2乗（2乗平均）は，　平均値(avg(x))の2乗と標準偏差(std(x))の2乗の和

$$\mathrm{rms}(x)^2 = \mathrm{avg}(x)^2 + \mathrm{std}(x)^2$$

で表されることを確かめよ．

グラムシュミット(15 点)

グラム・シュミット法のアルゴリズムは次のとおりである．

入 力 : n次元ベクトル$a_1 \dots a_k$

$i = 1 \dots k$について

- step1. 直交化: $\tilde{q}_i = a_i - (q_1^{\mathrm{T}}a_i)q_1 - \cdots - (q_{i-1}^{\mathrm{T}}a_i)q_{i-1}$.
- step2. 線形従属かどうかのテスト:$\tilde{q}_i = 0$ ならば終了．
- step3. 正規化: $q_i = \tilde{q}_i/||\tilde{q}_i||$

以下のa_1, a_2, a_3に対してグラム・シュミット法を適用し， 正規直交基底を作成せよ．

$$a_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

また，q_1, q_2, q_3が互いに直交していることを確認せよ．

問3 センター試験(20 点)

2021年度：数学II・B/本試験(第一日程) 改

２次関数の場合

特定(specific)の場合

座標平面上で，次の二つの2 次関数のグラフについて考える．

$$y = 3x^2 + 2x + 3 \ldots (1)$$
$$y = 2x^2 + 2x + 3 \ldots (2)$$

(1)，(2)の2次関数のグラフには次の共通点がある．

共通点

- y 軸との交点のy 座標は$\boxed{ア}$である．
- y 軸との交点における接線の方程式は $y = \boxed{イ}x + \boxed{ウ}$ である．

次の1. ~ 6.の2次関数のグラフのうち，y 軸との交点における接線の方程式 が $y = \boxed{イ}x + \boxed{ウ}$ となるものは$\boxed{エ}$である．

$\boxed{エ}$ の解答群

1. $y = 3x^2 - 2x - 3$
2. $y = -3x^2 + 2x - 3$
3. $y = 2x^2 + 2x - 3$
4. $y = 2x^2 - 2x + 3$
5. $y = -x^2 + 2x + 3$
6. $y = -x^2 - 2x - 3$

一般的(general)な場合

a, b, cを0でない実数とする．

曲線$y = ax^2 + bx + c$ 上の点(0, $\boxed{オ}$)に おける接線をlとすると，その方程式は $y = \boxed{カ}x + \boxed{キ}$である．

接線lとx軸との交点のx 座標は $\dfrac{\boxed{クケ}}{\boxed{コ}}$ である．

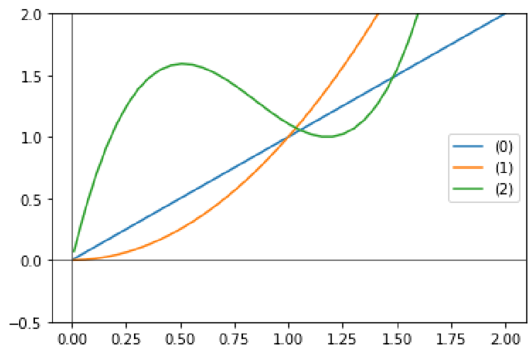
a, b, cが正の実数であるとき，曲線$y = ax^2 + bx + c$と接線lをおよび 直線$x = \dfrac{\boxed{クケ}}{\boxed{コ}}$ で囲まれた図形の面積をSとすると

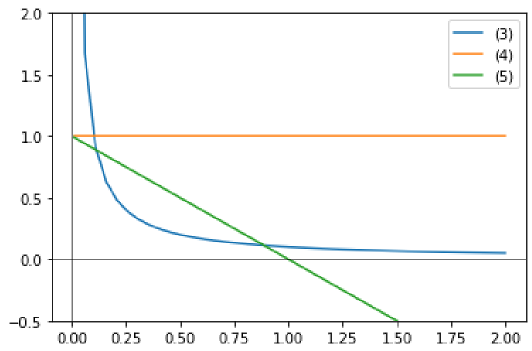
$$S = \frac{ac^{\boxed{サ}}}{\boxed{シ}\,b^{\boxed{ス}}}$$

である．

(3)において，$a = 1$ とし，S の値が一定となるように正の実数b, cの値を変化させる．このとき，b とc の関係を表すグラフの概形は$\boxed{セ}$である．

$\boxed{セ}$については，最も適当なものを，次の (0)から(5)のうちから一つ選べ．



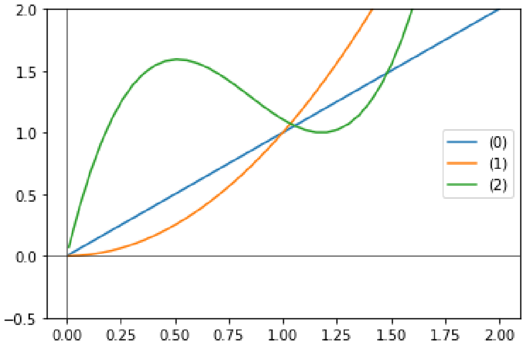


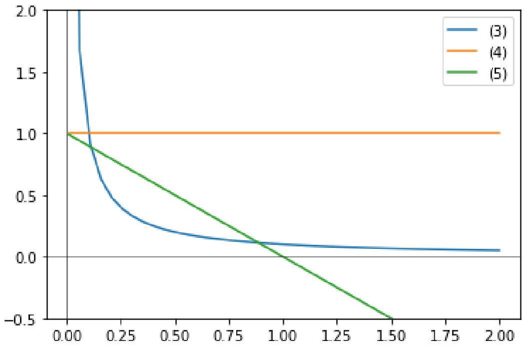
In [17]:

```
%matplotlib inline
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def show_plot(plt):
    plt.axhline(0, color='black', linewidth=.5)
    plt.axvline(0, color='black', linewidth=.5)
    plt.ylim(-0.5, lim)
    plt.legend()
    plt.show()
def func(x):
    return 4*x*(x-1)**2+1

lim = 2
xx=np.linspace(0.01, lim, 41)
dx=0.5
plt.plot(xx, xx,label='(0)')
plt.plot(xx,xx**2,label='(1)')
plt.plot(xx, func(xx-0.1796520430),label='(2)')
show_plot(plt)
plt.plot(xx, 0.1/xx,label='(3)')
yy=np.linspace(1, 1, 41)
plt.plot(xx, yy,label='(4)')
plt.plot(xx, -xx+1,label='(5)')
show_plot(plt)
```





３次関数の場合

特定(specific)の場合

座標平面上で，次の三つの3次関数のグラフについて考える．

$$y = 4x^3 + 2x^2 + 3x + 5 \ldots (4)$$
$$y = -2x^3 + 7x^2 + 3x + 5 \ldots (5)$$
$$y = 5x^3 - x^2 + 3x + 5 \ldots (6)$$

(4)，(5)，(6)の3次関数のグラフには次の共通点がある．

共通点

- y 軸との交点のy 座標は $\boxed{ソ}$ である．
- y 軸との交点における接線の方程式は $y = \boxed{タ}x + \boxed{チ}$ である．

一般的(general)な場合

a, b, c, d を0でない実数とする．

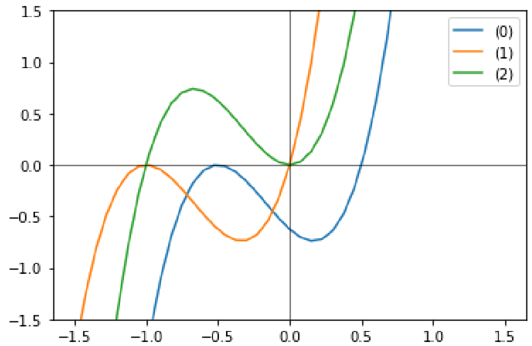
曲線$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 上の点(0, $\boxed{ツ}$) における接線の方程式は $y = \boxed{テ}x + \boxed{ト}$ である．

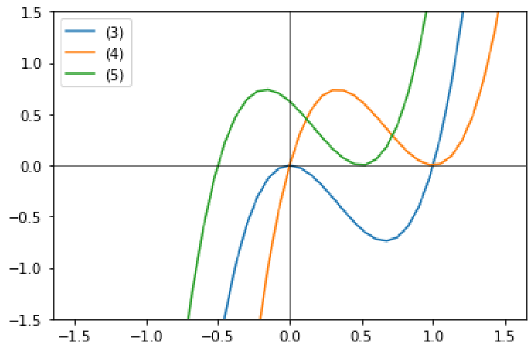
次に，$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, g(x) = \boxed{テ}x + \boxed{ト}$ とし，$f(x) - g(x)$ について考える．

$h(x) = f(x) - g(x)$ とおく．a, b, c, d が正の実数であるとき，$y = h(x)$ のグラフの概形は $\boxed{ナ}$ である．

$y = f(x)$ のグラフと$y = g(x)$ のグラフの共有点のx 座標は $\frac{\boxed{ニヌ}}{\boxed{ネ}}$ と $\boxed{ノ}$ である．また，x が $\frac{\boxed{ニヌ}}{\boxed{ネ}}$ と $\boxed{ノ}$ の間を動くとき，$|f(x) - g(x)|$の値が最大となるのは，$x = \frac{\boxed{ハヒフ}}{\boxed{ヘホ}}$のときである．

$\boxed{ナ}$については，最も適当なものを，次の(0)~(5)のうちから一つ選べ．





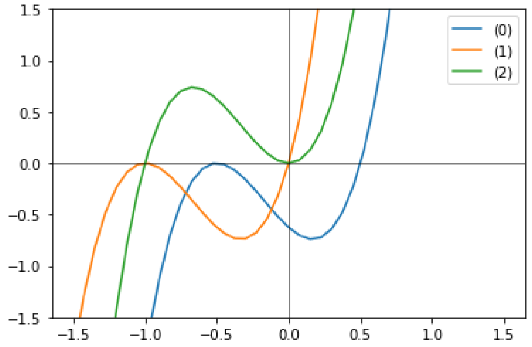
In [25]:

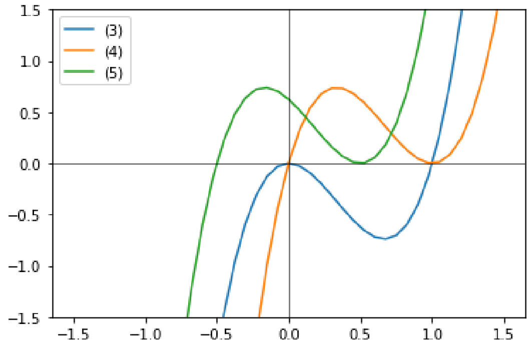
```
%matplotlib inline
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def show_plot(plt):
    plt.axhline(0, color='black', linewidth=.5)
    plt.axvline(0, color='black', linewidth=.5)
    plt.ylim(-lim, lim)
    plt.legend()
    plt.show()
def func(x, x0, x1, x2):
    return 5*(x-x0)*(x-x1)*(x-x2)

lim = 1.5
```

```
xx=np.linspace(-lim, lim, 41)
dx=0.5
plt.plot(xx, func(xx, -dx, -dx, dx),label='(0)')
plt.plot(xx, func(xx, -1,-1,0),label='(1)')
plt.plot(xx, func(xx, -1, 0,0),label='(2)')
show_plot(plt)
plt.plot(xx, func(xx, 0,0,1),label='(3)')
plt.plot(xx, func(xx,0,1,1),label='(4)')
plt.plot(xx, func(xx, -dx, dx, dx),label='(5)')
show_plot(plt)
```





問4 数値改変(20点)

問３において,

$$f(x) = 2.5x^3 + 5.4x^2 + 6.3x + 5.3$$

として，　$|f(x) - g(x)|$の値が最大になるのは，　$x = \dfrac{\boxed{\text{ハヒフ}}}{\boxed{\text{ヘホ}}}$のときであることを，　グラフをプロットして確かめよ．