2022年度　数式処理演習　pair試験問題

cc by Shigeto R. Nishitani, 2022/11/24実施

- file: ~/symbolic_math/22_pair/22_pair_ans.ipynb
- make problem: ruby text_dir/bin/pick_works_from_ans.rb 22_pair/22_pair_ans.ipynb -1 '27' '8 9 10 28 32'

以下の問題を python で解き，LUNA へ提出せよ．LUNA へは ipynb と pdf 形式の２種類を提出すること．

問 1 微積分

1(a) 関数の概形(15 点)

（テキスト p.144 の図 4.35 の確認)

ガウス関数

$$y = \exp\left(-\frac{x^2}{2\mathrm{sigma}^2}\right)$$

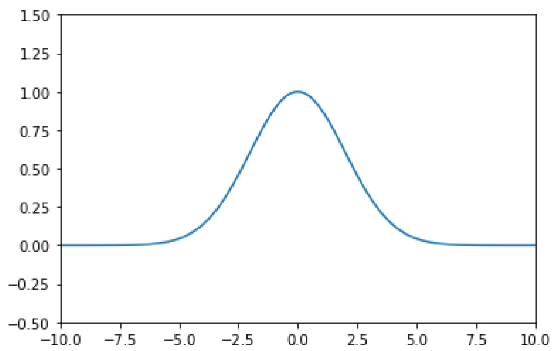
の概形を

```
sigma = 2
plt.xlim(-10,10)
plt.ylim(-0.5,1.5)
```

で描け．

In [1]:

```
%matplotlib inline
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

X = np.linspace(-10, 10, 100, endpoint=True)
gauss = np.exp(-X**2/2/2**2)

plt.plot(X, gauss)
plt.xlim(-10,10)
plt.ylim(-0.5,1.5)
plt.show()
```



1(b) 関数の積分(15 点)

sympy において，

```
sigma = symbols('sigma',positive = True)
```

を指定することで，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)dx$$

を求めよ．

In [2]:

```
from sympy import *
x,y = symbols('x y')
sigma = symbols('sigma',positive = True)
integrate(exp(-x**2/2/sigma**2),(x, -oo, oo))
```

Out[2]: $\sqrt{2}\sqrt{\pi}\sigma$

問 2 線形代数

2(a) 共分散の逆行列(15 点)

ここではΣを共分散とする． sigma = np.array([[2,1],[1,2]]) の逆行列Σ^{-1}を求めよ．

さらに検算せよ．

In [1]:

```
import numpy as np
sigma =np.array([[2,1],[1,2]])
sigma_inv = np.linalg.inv(sigma)
print(sigma_inv)
```

```
[[ 0.66666667 -0.33333333]
 [-0.33333333  0.66666667]]
```

In [3]:

```
np.dot(sigma_inv, sigma)
```

Out[3]:

```
array([[1., 0.],
       [0., 1.]])
```

2(b) 一般的な 2 次元ガウス関数(15 点)

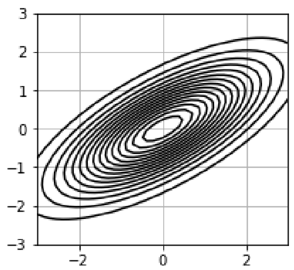
さらに，sympy で v = Matrix([x0,x1]) として， $v^T\Sigma^{-1}v$を求めよ．

得られた式を$\exp$の指数部に入れて規格化した関数の 3d プロットは以下の通りとなる（テキストp.150, 図4.37）

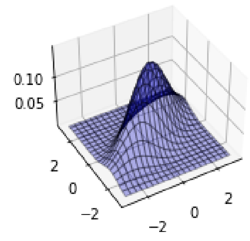
注意 ：：配列同士の内積にはテキストでは， numpy.matmulのoperator '@'を使っている．2次元配列(行列)の内積では， numpy.dotから呼び出され同じ結果を返す． マニュアルではmatmulの使用を推奨している(https://numpy.org/doc/stable/reference/generated/numpy.dot.html#numpy.dot).

In [5]:
```
%matplotlib inline
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def gauss(x0, x1, mu, sigma):
    x = np.array([x0,x1])
    a=1/(2*np.pi)*1/(np.linalg.det(sigma) ** (1/2))
    inv_sigma = np.linalg.inv(sigma)
    y=a * np.exp(
        (-1/2)*(x-mu).T @ inv_sigma @(x-mu))
    return y
```

In [6]:
```
mu=np.array([0,0])
sigma =np.array([[2,1],[1,1]])
x0_min, x0_max = -3,3
x1_min, x1_max = -3,3

x0_n, x1_n = 40, 40
x0 =np.linspace(x0_min,x0_max, x0_n)
x1 =np.linspace(x1_min,x1_max, x1_n)

f = np.zeros((x1_n, x0_n))
for i0 in range(x0_n):
    for i1 in range(x1_n):
        f[i1,i0] = gauss(x0[i0],x1[i1], mu, sigma)
xx0, xx1 = np.meshgrid(x0,x1)

plt.figure(figsize=(7,3))

plt.subplot(1,2,1)
cont = plt.contour(xx0, xx1, f, levels=15, colors="black")
plt.grid()
```



In [7]:
```
ax =plt.subplot(1,2,2, projection="3d")
ax.plot_surface(
    xx0, xx1, f,
    rstride =2, cstride =2, alpha=0.3, color="blue", edgecolor="black",
)
ax.set_zticks([0.05, 0.10])
ax.view_init(40,-120)
plt.show()
```



In [8]:
```
from sympy import *

x0,x1 = symbols('x0 x1')
xx = Matrix([x0, x1])
expand((xx.T * sigma_inv * xx)[0])
```

Out[8]: $0.666666666666667x_0^2 - 0.666666666666667x_0x_1 + 0.666666666666667x_1^2$

問 3 センター試験原題(20 点)

(2020 大学入試センター試験 数学 II・B/追試験 第 2 問)

a, b, c を実数とし， 関数$f(x) = x^3 - 1$, $g(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$を考える． 座標平面上の曲線$y = f(x)$を$C_1$とし，曲線$y = g(x)$ をC_2とする． C_2は点 A(-1,-2)を通り， C_2の A における接線は C_1の A における接線と一致するものとする．

(1) 曲線C_1の点 A における接線をlとする． $f'(-1) = \boxed{ア}$により， lの方程式は $y = \boxed{イ}x + \boxed{ウ}$である． また，原点 O の直線$l$の距離は $\frac{\sqrt{\boxed{エオ}}}{\boxed{エオ}}$である．

ヒント：問 4 での数値改変に備えて，x0=-1, y0=f.subs({x:x0})として問題を解いていけ．

In [9]:
```
from sympy import *

a,b,c,x = symbols('a b c x')
f=x**3-1
g=x**3+a*x**2+b*x+c
```

In [10]:
```
x0=-1 #1/2
y0=f.subs({x:x0})
print(x0,y0)
```

```
-1 -2
```

In [11]:
```
k = diff(f,x).subs({x: x0})
```

In [12]:
```
k*(x-x0)+y0
```

Out[12]:

$3x + 1$

In [13]:
```
(1)/sqrt(3**2+(-1)**2)
```

Out[13]: $\frac{\sqrt{10}}{10}$

(2) 曲線C_2の点 A における接線は(1)の直線lと一致しているので，$g'(-1) = \boxed{\text{カ}}$である．したがって，$b, c$を$a$を用いて表すと，$b = \boxed{\text{キ}}a, c = \boxed{\text{ク}} - \boxed{\text{ケ}}$となる．

In [14]:
```
g_prime=diff(g,x).subs({x:x0})
print(g_prime)
s1 = solve(g_prime-k, b)[0]
print(s1)
```

```
-2*a + b + 3
2*a
```

In [15]:
```
s2 = solve(g.subs({x:x0}).subs({b:s1})-y0,c)[0]
print(s2)
```

```
a - 1
```

(3) $a = -2$のとき，関数$g(x)$は$\frac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}}$で極大値$\frac{\boxed{\text{スセソ}}}{\boxed{\text{タチ}}}$をとり，$\boxed{\text{ツ}}$で極小値$\boxed{\text{テトナ}}$をとる．

解答注意

- 極大値は浮動小数点数でも良い．(分数で出したかったらRationalを使え)
- $\boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{イ}}, \boxed{\text{ウ}}, \ldots$ を明示する(あるいは書き出す)必要はない．
- 以下は関数$f(x), g(x : a = -2, x0 = -1)$のplotである．解答の検算の参考とせよ．

In [16]:
```
g_curve = g.subs({b:s1}).subs({c:s2}).subs({a:-2})
print(g_curve)
```

```
x**3 - 2*x**2 - 4*x - 3
```

In [17]:
```
solve(diff(g_curve,x),x)
```

Out[17]: [-2/3, 2]

In [18]:
```
g_curve.subs({x:2})
```

Out[18]: -11

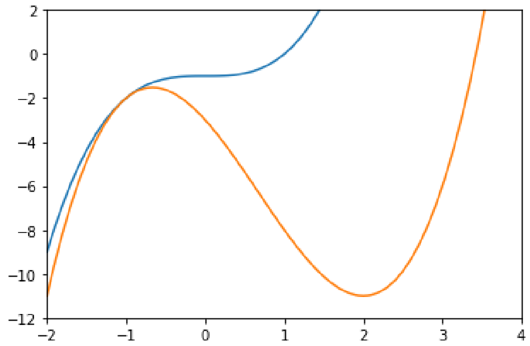
In [19]:
```
g_curve.subs({x:-Rational(2,3)})
```

Out[19]: $-\frac{41}{27}$

(4) 以下は問題の最後までやった場合の答案です．参考までに．

$a < 0$とする．$-2 \leqq x \leqq -1$において，曲線C_1とC_2および直線$x = -2$で囲まれた図形の面積をS_1とする．また，$-1 \leqq x \leqq 1$において，曲線C_1とC_2および直線$x = 1$で囲まれた図形の面積をS_2とする．このとき，$S = S_1 + S_2$とおくと，$S = \boxed{\text{ヌネ}}a$となる．

In [20]:
```
%matplotlib inline
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

g_curve = x**3 - 2*x**2 - 4*x - 3
xx_n = 100
xx =np.linspace(-2, 4, xx_n)

gY = np.zeros(xx_n)
fY = np.zeros(xx_n)
for i0 in range(xx_n):
    gY[i0] = g_curve.subs({x:xx[i0]})
    fY[i0] = f.subs({x:xx[i0]})

plt.plot(xx, fY)
plt.plot(xx, gY)
plt.xlim(-2,4)
plt.ylim(-12,2)
plt.show()
```



In [21]:
```
integrate(f-g,(x,-2,1)).subs({b:s1}).subs({c:s2})
```

Out[21]: $-3a$

問 4 センター試験改変(20 点)

点 A のx座標を$-1/2$として同様に求めると，$a = -2$では$g(x) = x^3 - 2x^2 - 2x - 3/2$となることを確かめよ．

さらに，点 A のx座標が-1.1で，$a = -2$の時の$g(x)$を求めよ．f(x)およびg(x; a=-2, x0=-1.1)を同時プロットすると以下の通りとなる．

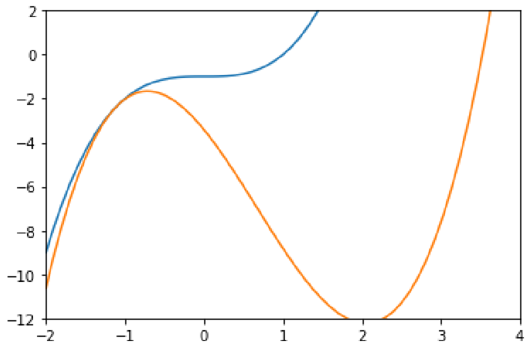
In [9]:
```
from sympy import *
a,b,c,x = symbols('a b c x')
f=x**3-1
g=x**3+a*x**2+b*x+c
x0=-1/2
y0=f.subs({x:x0})
print('x0, y0= %5.3f, %10.5f' % (x0,y0))
k = diff(f,x).subs({x: x0})
print('k = %5.3f' %k)
k*(x-x0)+y0
```

```
g_prime=diff(g,x).subs({x:x0})
print("g_prime:", g_prime)
s1 = solve(g_prime-k, b)[0]
print(s1)
s2 = solve(g.subs({x:x0}).subs({b:s1})-y0,c)[0]
print(s2)
g_curve = g.subs({b:s1}).subs({c:s2}).subs({a:-2})
print("g_curve: ", g_curve)
```

```
x0, y0= -0.500,  -1.12500
k = 0.750
g_prime: -1.0*a + b + 0.75
a
0.25*a - 1.0
g_curve:  x**3 - 2*x**2 - 2*x - 1.5
```

In [23]:

```
%matplotlib inline
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

xx_n = 100
xx =np.linspace(-2, 4, xx_n)

gY = np.zeros(xx_n)
fY = np.zeros(xx_n)
for i0 in range(xx_n):
    gY[i0] = g_curve.subs({x:xx[i0]})
    fY[i0] = f.subs({x:xx[i0]})

plt.plot(xx, fY)
plt.plot(xx, gY)
plt.xlim(-2,4)
plt.ylim(-12,2)
plt.show()
```



In [24]:

```
g.subs({x:x0}).subs({b:s1}).subs({c:s2}).subs({a:-2})
```

Out[24]: -2.331

In [25]:

```
diff(g,x).subs({x:x0}).subs({b:s1}).subs({c:s2}).subs({a:-2})
```

Out[25]: 3.63