「演習と応用
線形代数」
寺田文行・木村宣昭著
(サイエンス社, 2000)

6.2 像と核

◦像と核◦

f を $\boldsymbol{R}^n$ から $\boldsymbol{R}^m$ への線形写像とする.

像 $\mathrm{Im}\, f = \{f(\boldsymbol{x}); \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n\}$ は $\boldsymbol{R}^m$ の部分空間でこれを像（空間）という. f の表現行列を $A = [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n]$ するとき

$$\mathrm{Im}\, f = L\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n\} \quad (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \text{で生成される部分空間})$$

$$\dim(\mathrm{Im}\, f) = \mathrm{rank}\, A = \mathrm{rank}\, [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n]$$

$$\boldsymbol{y} \in \mathrm{Im}\, f \iff \mathrm{rank}\, [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n] = \mathrm{rank}\, [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n\ \boldsymbol{y}]$$

である. 一般に, V を $\boldsymbol{R}^n$ の部分空間とすると V の像

$$f(V) = \{f(\boldsymbol{x})\ ;\ \boldsymbol{x} \in V\}$$

は $\boldsymbol{R}^m$ の部分空間である.

全射 $\mathrm{Im}\, f = \boldsymbol{R}^m$ のとき, 線形写像 f は全射であるという. このとき

$$\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^m \implies f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y} \text{ となる } \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n \text{ が存在する.}$$

$$f \text{ が全射} \iff \mathrm{rank}\, A = m$$

核 $\mathrm{Ker}\, f = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n; f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}$ は $\boldsymbol{R}^n$ の部分空間であってこれを核（空間）という. このとき

$$\mathrm{Ker}\, f = \{\boldsymbol{x}; A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\} : \text{同次連立 1 次方程式 } A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \text{ の解空間}$$

$$\dim(\mathrm{Ker}\, f) = n - \mathrm{rank}\, A$$

である. 一般に, W を $\boldsymbol{R}^m$ の部分空間とすると, W の逆像

$$f^{-1}(W) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n; f(\boldsymbol{x}) \in W\}$$

も $\boldsymbol{R}^n$ の部分空間である.

単射 $\mathrm{Ker}\, f = \{\boldsymbol{0}\}$ のとき f を単射であるという. このとき

$$f(\boldsymbol{x}_1) = f(\boldsymbol{x}_2) \implies \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2$$

$$f \text{ が単射} \iff \mathrm{rank}\, A = n$$

次元定理 $\dim(\mathrm{Im}\, f) + \dim(\mathrm{Ker}\, f) = n$

◦線形写像と1次独立性◦ $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k \in \boldsymbol{R}^n$ が1次独立でも $f(\boldsymbol{x}_1), f(\boldsymbol{x}_2), \ldots, f(\boldsymbol{x}_k)$ は1次独立とは限らないから, 線形写像 f は1次独立性を保持しないが,

$$f(\boldsymbol{x}_1), f(\boldsymbol{x}_2), \ldots, f(\boldsymbol{x}_k) : 1 \text{次独立} \implies \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k : 1\text{次独立}$$

が成り立つ.

とくに, f が単射ならば1次独立性は保持される, すなわち

$$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k : 1\text{次独立} \implies f(\boldsymbol{x}_1), f(\boldsymbol{x}_2), \ldots, f(\boldsymbol{x}_k) : 1\text{次独立}$$

例題 4 ―――― 像と核

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$ とする. $\boldsymbol{R}^4$ から $\boldsymbol{R}^3$ への線形写像 f を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で与えるとき f の $\mathrm{Im}\, f$ および $\mathrm{Ker}\, f$ の次元と1組の基底を求めよ.

[解答] 右の表から $\dim(\mathrm{Im}\, f) = \mathrm{rank}\, A = 2$. $\mathrm{Im}\, f$ は A の4個の列ベクトルで生成されるから, このうちの2個の1次独立なベクトルが $\mathrm{Im}\, f$ の基底である. たとえば表から A の第1列と第2列は1次独立だから $\mathrm{Im}\, f$ の1組の基底として $(1, -1, 2), (0, 1, 1)$ を採ることができる.

A			
1	0	−1	−2
−1	1	2	3
2	1	−1	−3
1	0	−1	−2
0	1	1	1
0	1	1	1
1	0	−1	−2
0	1	1	1
0	0	0	0

$\mathrm{Ker}\, f$ は同次連立1次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間だから, 表から次元は $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 4 - \mathrm{rank}\, A = 4 - 2 = 2$ であり, 解は

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

だから $(1, -1, 1, 0), (2, -1, 0, 1)$ が $\mathrm{Ker}\, f$ の1組の基底である.

問題

4.1 つぎの行列を表現行列としてもつ線形写像 f の像空間および核空間を求めよ.

(a) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 7 & 2 & 12 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

4.2 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 8 & -2 \end{bmatrix}$ とする. $\boldsymbol{R}^4$ から $\boldsymbol{R}^3$ への線形写像を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で与えるとき, ベクトル $\boldsymbol{a} = (1, -1, 1)$, $\boldsymbol{b} = (-2, 1, 7)$ に対し, $\boldsymbol{a}$ の逆像 $\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^4; f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}\}$ および $\boldsymbol{b}$ の逆像 $\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^4; f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}\}$ を求めよ.