2.3 同次連立 1 次方程式の基本解

• 同次連立 1 次方程式 •　連立 1 次方程式の定数項がすべて 0 のもの：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

すなわち　$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$,　$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$,　$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

自明解　同次連立 1 次方程式の解である $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$，すなわち $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

非自明解　同次連立 1 次方程式の自明解以外の解.

$$\text{非自明解をもつ} \iff \operatorname{rank} A < n \iff A \text{ は正則でない}$$

基本解　同次連立 1 次方程式が非自明解をもつとき，非自明解のうち $n - r$ 個 ($r = \operatorname{rank} A$) のベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-r}$ (n 次元列ベクトル) で，

$$\operatorname{rank}[\boldsymbol{x}_1 \ \boldsymbol{x}_2 \ \ldots \ \boldsymbol{x}_{n-r}] = n - r$$

となるもの.

一般解　$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-r}$ を 1 組の基本解とするとき，任意の解 $\boldsymbol{x}$ は,

$$\boldsymbol{x} = \lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \lambda_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + \lambda_{n-r}\boldsymbol{x}_{n-r} \quad (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r} \text{は任意定数})$$

と表せる．この右辺の形を $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-r}$ の **1 次結合**といい，任意定数 (パラメータ) を含む解を一般解という.

注意　$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ が同次連立 1 次方程式の解ならば，$\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \lambda_2\boldsymbol{x}_2$ も解である.

• 非同次連立 1 次方程式 •

同伴な同次連立 1 次方程式　連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}(\neq \boldsymbol{0})$ に対し，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

特殊解　$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ のパラメータを含まない解.

非同次連立 1 次方程式の一般解　$\boldsymbol{x}_0$ を $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の特殊解とすると，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の一般解は，つぎのように表せる.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= (\text{特殊解}) + (\text{同伴な同次連立 1 次方程式の一般解}) \\ &= \quad \boldsymbol{x}_0 \quad + \lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \lambda_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + \lambda_{n-r}\boldsymbol{x}_{n-r} \end{aligned}$$

注意　非同次連立 1 次方程式の一般解を，特殊解と同伴な同次連立 1 次方程式の基本解の 1 次結合の和として表わす仕方は一意的でない.

例題 5　　特殊解と基本解

つぎの連立 1 次方程式を解き，一般解を特殊解と同伴な同次連立 1 次方程式の基本解の 1 次結合の和の形で表せ.

$$\begin{cases} x - 3y - z + 2u = 3 \\ -x + 3y + 2z - 2u = 1 \\ -x + 3y + 4z - 2u = 9 \\ 2x - 6y - 5z + 4u = -6 \end{cases}$$

解答　右のようにはき出して解を求めると $y\,(=\alpha)$, $u\,(=\beta)$ を任意として,

x	y	z	u	定数	
1	−3	−1	2	3	
−1	3	2	−2	1	
−1	3	4	−2	9	
2	−6	−5	4	−6	
1	−3	−1	2	3	
0	0	1	0	4	②＋①
0	0	3	0	12	③＋①
0	0	−3	0	−12	④＋①×(−3)
1	−3	0	2	7	①＋②
0	0	1	0	4	
0	0	0	0	0	③＋②×(−2)
0	0	0	0	0	④＋②×3

$$\begin{cases} x = 7 + 3\alpha - 2\beta \\ y = \qquad \alpha \\ z = 4 \\ u = \qquad\qquad \beta \end{cases}$$

ゆえに　$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

であり,

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2 = 4 - 2$$

だから　$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (= \boldsymbol{x}_1)$, $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} (= \boldsymbol{x}_2)$ が 1 組の基本解であり $\begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} (= \boldsymbol{x}_0)$ が特殊解

である．以上から解を $\boldsymbol{x}$ とすると $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \alpha\boldsymbol{x}_1 + \beta\boldsymbol{x}_2$ である.

問　題

5.1　つぎの同次連立 1 次方程式を解き，1 組の基本解を求めよ.

(a) $\begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ 3x - y + 2z = 0 \\ 3x - 4y - z = 0 \end{cases}$　(b) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 4x + y + 2z = 0 \\ 3x - 3y - z = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$　(d) $x + y - 2z + u = 0$

5.2　例題 3 および問題 3.1 の解の特殊解と同伴な同次連立 1 次方程式の 1 組の基本解を求めよ.

5.3　A, B を n 次正方行列とする．AB が正則 $\Longrightarrow$ A, B が正則　を示せ.

7.3　2 次曲線

座標変換　直交座標系 $\{O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ を新座標系 $\{O'; \boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2\}$ に変換するとき

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}'_1 = p_{11}\boldsymbol{e}_1 + p_{21}\boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}'_2 = p_{12}\boldsymbol{e}_1 + p_{22}\boldsymbol{e}_2 \end{cases} \qquad \left(P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \text{は直交行列} \right)$$

とし O' の旧座標系に関する成分を (x_0, y_0) とする．点 P の旧座標系に関する成分を (x, y), 新座標系に関する成分を (x', y') とすると

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

が成り立つ．これを平面の**座標変換の式**という．

2 次曲線　平面において，直交座標系に関して x, y の方程式

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

で表される図形を **2 次曲線**という．

$$A = \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} a & h \\ h & b \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} g \\ f \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

とおくと，方程式は

$${}^tXAX = 0 \quad \text{あるいは} \quad {}^t\boldsymbol{x}Q\boldsymbol{x} + 2{}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{x} + c = 0$$

と表される．

主軸変換　座標系を変換して**標準形**を導くことを**主軸変換**という．2 次曲線は主軸変換によって，つぎの標準形のいずれかになる．

rank Q	rank A	det Q	標準形	曲線の種類	
2 (有心)	3	$\det Q > 0$	$\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$	楕円	固有
			$\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = -1$	虚楕円	
		$\det Q < 0$	$\dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$	双曲線	固有
	2	$\det Q > 0$	$\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 0$	1 点	退化
		$\det Q < 0$	$\dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 0$	交わる 2 直線	退化
1 (無心)	3	$\det Q = 0$	$y^2 = 4px,\ (p > 0)$	放物線	固有
	2		$y^2 = \alpha^2$	平行 2 直線	退化
			$y^2 = -\alpha^2$	虚平行 2 直線	
	1		$y^2 = 0$	1 直線	退化

例題 7　　**2 次曲線の標準形 (1)**

つぎの 2 次曲線の標準形を求めよ．

$$5x^2 + 2xy + 5y^2 - 10x - 2y - 7 = 0$$

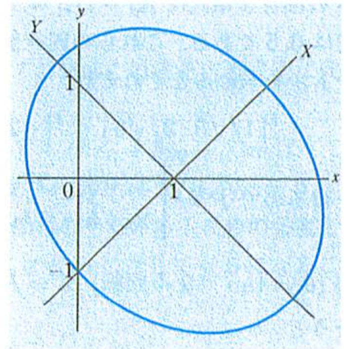
解答　与えられた 2 次方程式は

$$Q = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

とおくと

$${}^t\boldsymbol{x}Q\boldsymbol{x} + 2{}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{x} - 7 = 0$$

である．



Q の固有多項式は $|Q - tE| = (6 - t)(4 - t)$ だから固有値は 6, 4 である．これらの固有値に対する単位固有ベクトルを求めるとそれぞれ

$${}^t[1/\sqrt{2} \ \ 1/\sqrt{2}], \quad {}^t[-1/\sqrt{2} \ \ 1/\sqrt{2}]$$

を得るので $P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ とおき，座標変換 ($\pi/4$ の回転) $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ を行なうと

$${}^t\boldsymbol{y}{}^tPQP\boldsymbol{y} + 2{}^t\boldsymbol{b}P\boldsymbol{y} - 7 = 0$$

$$\therefore \quad 6(x')^2 - 6\sqrt{2}x' + 4(y')^2 + 4\sqrt{2}y' - 7 = 0$$

$$\therefore \quad 6(x' - 1/\sqrt{2})^2 + 4(y' + 1/\sqrt{2})^2 - 12 = 0$$

を得る．さらに，座標の平行移動 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ を行なうと

$$6X^2 + 4Y^2 = 12, \quad \text{すなわち} \quad \frac{X^2}{2} + \frac{Y^2}{3} = 1$$

となる．これは楕円である．

注意　標準形を得る座標変換の式は $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

問題

7.1　つぎの 2 次曲線の標準形を求めよ．

(a)　$3x^2 + 4xy + 6y^2 - 6x - 2y + 2 = 0$

(b)　$4x^2 + 12xy + 4y^2 - 12x - 8y + 9 = 0$

(c)　$4x^2 - 6xy - 4y^2 + 7x + 6y - 2 = 0$