寺田・坂田，「演習と応用 微分積分」(サイエンス社,2003)

例題 9　　関数の導関数 (1)

つぎの関数の導関数を求めよ．

(1) $y = \sqrt[3]{(x^2+1)^2}$　　(2) $y = \cos(\sin x)$

Maple Ex

(3) $y = e^{x^x}$　$(x > 0)$　　(4) $y = \cos^{-1}\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

解答　(1) $y = \sqrt[3]{(x^2+1)^2} = (x^2+1)^{2/3}$

$$y' = \frac{2}{3}(x^2+1)^{-1/3}\cdot 2x = \frac{4}{3}\frac{x}{\sqrt[3]{(x^2+1)}}$$

(2) $u = \sin x$ とおくと，$y = \cos u$．p.16 の定理 16（合成関数の導関数）より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = -\sin u\cdot\cos x = -\sin(\sin x)\cdot\cos x$$

(3) $y = e^{x^x}$ $(x > 0)$ は $y = e^{(x^x)}$ という意味である．この両辺の対数をとると $\log y = x^x$．この両辺を x で微分すると $y'/y = (x^x)'$ となる．

$u = x^x$ とおき，u' を求める．そのためこの両辺の対数をとると $\log u = x\log x$．この両辺を x で微分すると $u'/u = \log x + 1$．よって $u' = x^x(\log x + 1)$．

$$\therefore\quad y' = e^{x^x}\cdot x^x(\log x + 1)$$

(4) $$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2}}\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$$

$$= -\frac{x^2+1}{2x}\frac{2x(x^2+1)-2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = -\frac{2}{x^2+1}\quad (x > 0)$$

問　題

9.1　つぎの関数の導関数を求めよ．

(1) e^{x^2}　(2) $x^2\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}$　$(-1 < x < 1,\ x \neq 0)$

15-2

(3) $\sqrt{x^2+1}\sqrt[3]{x^3+1}$　(4) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$　(5) $\dfrac{x}{x-\sqrt{x^2+a^2}}$　$(a > 0)$

(6) $(\tan x)^{\sin x}$　$(0 < x < \pi/2)$　(7) $\log(x+\sqrt{x^2+1})$

9.2　つぎの関数の導関数を求めよ．

15-1

(1) $y = \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\tan\dfrac{x}{2}\right)$　　(2) $y = \cos^{-1}\dfrac{4+5\cos x}{5+4\cos x}$

(3) $y = \sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$

例題 10　　関数の導関数 (2)

サイクロイド $\left.\begin{array}{l} x = a(\theta-\sin\theta) \\ y = a(1-\cos\theta) \end{array}\right\}$ 上の $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ における接線の方程式を求めよ．

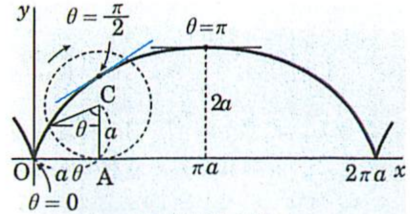
ただし $a > 0$ とする．

解答　p.17 の定理 18（媒介変数を用いて表される関数の導関数）を用いる．

$$\frac{dx}{d\theta} = a(1-\cos\theta),\qquad \frac{dy}{d\theta} = a\sin\theta$$

よって，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a\sin\theta}{a(1-\cos\theta)} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} = \cot\frac{\theta}{2}$$



サイクロイド

$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ のときは

$$x = \left(\frac{\pi}{2}-1\right)a,\quad y = a,\quad \frac{dy}{dx} = \cot\frac{\pi}{4} = 1$$

したがって，接線の方程式は

$$y - a = 1\cdot\left\{x - \left(\frac{\pi}{2}-1\right)a\right\}\quad よって，\quad y = x + \left(2-\frac{\pi}{2}\right)a$$

問　題

10.1　つぎの関係から $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ（結果は t の関数のままでよい）．

15-2

(1) $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ $(a > 0)$　　(2) $\begin{cases} x = \dfrac{3t}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x = 1-t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t) \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases}$ $(a > 0)$

10.2　双曲線関数 $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$ の導関数を求めよ．

寺田・坂田, 「演習と応用 微分積分」(サイエンス社,2003)

例題 5* —— **2重積分の変数の変換 ($x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$)**

つぎの2重積分を $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ と変数を変換して求めよ.

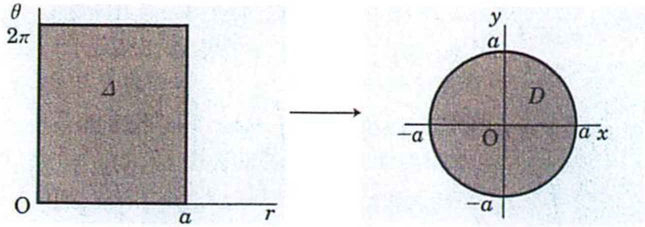
$$\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy, \quad D: x^2+y^2 \leqq a^2 \quad (a>0)$$

解答 p.91 の定理4 (2重積分の変数の変換) を用いる.

極座標 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ に変数を変換する. $r\theta$ 平面の領域 Δ を

$$\Delta = \{(r,\theta) : 0 \leqq r \leqq a,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi\}$$

とおくと, Δ は $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ によって D に写像される. このとき



(i) 線分 $r=0$ は原点に写像され, 線分 $\theta=0$ 上の点と $\theta=2\pi$ 上の点も同じ点に写像される. それ以外では Δ の点と D の点は1対1である.

(ii) ヤコビアン $J = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$ は $r=0$ 以外では0にならない.

例外の点では面積が0になっているので積分値には関係しないので p.91 の定理4を用いることができる. よって,

$$\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy = \iint_\Delta r^2\cdot r\,dr\,d\theta = \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^a r^3\,dr\right) = \frac{\pi a^4}{2}$$

問 題

5.1 つぎの2重積分の値を計算せよ ($x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ と変換せよ).

(1) $\displaystyle\iint_D x^2\,dx\,dy, \quad D: x^2+y^2 \leqq x$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^2}, \quad D: (x^2+y^2)^2 \leqq x^2-y^2,\ x \geqq 0$ (連珠形)

(3) $\displaystyle\iint_D \tan^{-1}\frac{y}{x}\,dx\,dy, \quad D: x^2+y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0$

* 極座標に変数を変換するとき, 対応が1対1でない点が存在する. しかし, それらの点の面積は上の(i), (ii)のように0であるので, 以後は問題にしない.

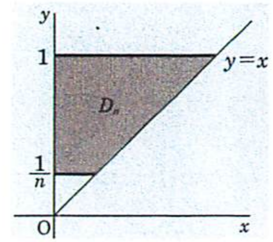
例題 6 —— **広義の2重積分 (不連続な点, 不連続な曲線のある場合)**

つぎの広義の2重積分を求めよ.

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad D: 0 \leqq x \leqq y \leqq 1$$

解答 p.91 の広義の2重積分を用いる. 被積分関数は閉領域 D で正で, 原点以外では連続である. よって D の近似増加列 $\{D_n\}$ をつぎのようにとる.

$$D_n : 0 \leqq x \leqq y,\ \frac{1}{n} \leqq y \leqq 1$$



$$I_n = \iint_{D_n} \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int_{1/n}^1 dy \int_0^y \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx$$

$$= \int_{1/n}^1 \left[\log(x+\sqrt{x^2+y^2})\right]_0^y dy$$

$$= \int_{1/n}^1 \{\log(1+\sqrt{2})y - \log y\}\,dy$$

$$= \int_{1/n}^1 \log(1+\sqrt{2})\,dy = \log(1+\sqrt{2})[y]_{1/n}^1 = \log(1+\sqrt{2})\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$$\to \log(1+\sqrt{2}) \quad (n\to\infty)$$

$$\therefore \iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \log(1+\sqrt{2})$$

問 題

6.1 つぎの広義の2重積分を求めよ.

(1)* $\displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{(y-x)^\alpha} \quad (0<\alpha<1), \quad D: 0 \leqq x \leqq y \leqq 1$ — 15-2 改 $\alpha = 1/3$

(2)** $\displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{(x+y)^{3/2}}, \quad D: 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1$

(3)*** $\displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}} \quad (\alpha>0), \quad D: x^2+y^2 \leqq 1$

* 被積分関数が直線 $y=x$ 上の点で不連続であるが, この場合も p.91 の広義の2重積分と同様に考えて, 近似増加列は $D_n : 1/n \leqq y \leqq 1,\ y \geqq x+1/n$ とせよ.

** 原点で被積分関数が不連続である. 近似増加列は D から $0 \leqq x \leqq 1/n,\ 0 \leqq y \leqq 1/n$ を除いたものとせよ.

*** 原点で被積分関数が不連続である. 近似増加列は $D_n : 1/n^2 \leqq x^2+y^2 \leqq 1$ とせよ.

2011 大学入試センター試験過去問レビュー
数学IA,IIB(河合出版, 2010)

$$\therefore 3<\log_3 x<\frac{7}{2}.$$

$$\log_3 3^3<\log_3 x<\log_3 3^{\frac{7}{2}}.$$

$$3^3<x<3^{\frac{7}{2}}.$$

$$\boxed{27}<x<\boxed{27}\sqrt{\boxed{3}}.$$

となる.

さらに, a, b, c, d のすべてが正となるのは

$$5<t$$

$$\therefore \boxed{243}<x.$$

(3) $\boxed{\text{タチ}}<x<\boxed{\text{ツテ}}\sqrt{\boxed{\text{ト}}}$ の範囲とは, (2) より

$$3<t<\frac{7}{2} \qquad \cdots ⑨$$

$5<\log_3 x$ として, $\log_3 3^5<\log_3 x$ より, $3^5<x$ を得る.

のことであり, 前ページの図より, a, c が負であり, b, d が正である. a と c の大小を, t で表して調べる.

$$a-c=\left(t-\frac{7}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}t-\frac{5}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}t-1$$
$$=\frac{1}{2}(t-2).$$

⑨より, $\frac{1}{2}(t-2)>0$ である. よって,

$$a-c>0.$$
$$\therefore \quad c<a. \qquad \cdots ⑩$$

同様に, b, d の大小を, t で考える.

$$b-d=\left(t-\frac{5}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}t-\frac{3}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}t-1$$
$$=\frac{1}{2}(t-2)>0$$

⑨より, $\frac{1}{2}(t-2)>0$ であり,

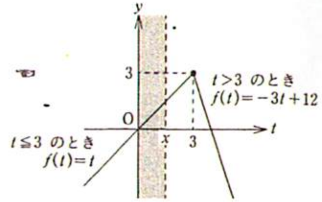
$$\therefore b-d>0.$$
$$\therefore \quad d<b. \qquad \cdots ⑪$$

⑩, ⑪, そして, a, c は負であり, b, d は正より,

$$\boxed{c}<\boxed{a}<\boxed{d}<\boxed{b}.$$

テキスト

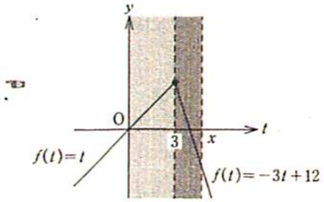
第2問　図形と方程式・微分法・積分法



(1) $0\leqq x\leqq 3$ のとき, $f(t)=t$ なので

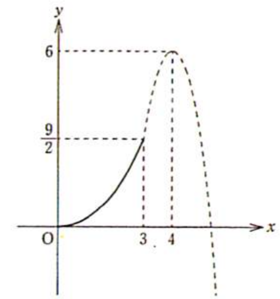
$$g(x)=\int_0^x t\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^x$$
$$=\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}x^{\boxed{2}}$$

である. また, $x\geqq 3$ では, 右図のように $t=3$ を境にして $f(t)$ の形が変わるので



$$g(x)=\int_0^3 t\,dt+\int_3^x(-3t+12)\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^3+\left[-\frac{3}{2}t^2+12t\right]_3^x$$
$$=\frac{9}{2}-0+\left(-\frac{3}{2}x^2+12x\right)-\left(-\frac{27}{2}+36\right)$$
$$=-\frac{3}{2}x^2+\boxed{12}x-\boxed{18}$$

となる.



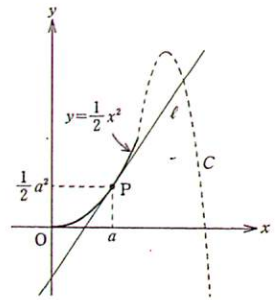
以上まとめて

$$\begin{cases} 0\leqq x\leqq 3 \text{ のとき}, & g(x)=\frac{1}{2}x^2, \\ x\geqq 3 \text{ のとき}, & g(x)=-\frac{3}{2}x^2+12x-18. \end{cases} \cdots ①$$

である.

$x\geqq 3$ では

$$g(x)=-\frac{3}{2}(x-4)^2+6.$$



(2) C 上の点 $\mathrm{P}(a, g(a))$ は, $0<a<3$ より,

$$g(x)=\frac{1}{2}x^2$$

の上にある. $g'(x)=x$ より, P での C の接線 ℓ の傾きは $\boxed{a}$ であるので, ℓ の方程式は

$$y-\frac{1}{2}a^2=a(x-a).$$

$$\therefore \quad \ell: y=ax-\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}a^2. \qquad \cdots ②$$

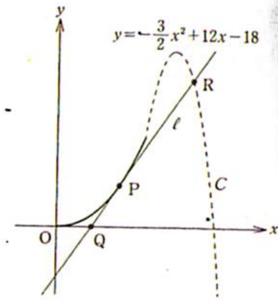
接線の方程式
曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ での接線の方程式は
$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$
である.

(3) ℓ と x 軸の交点 Q は, ② において, $y=0$ として

$$0=ax-\frac{1}{2}a^2.$$

$\therefore\ x=\dfrac{1}{2}a.$

$$Q\left(\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}a,\ 0\right).$$



また，ℓとCのP以外の交点は，①の $x\geqq 3$ の $g(x)$ を用いて，②と連立させて求められる.

$$\begin{cases} C:y=-\dfrac{3}{2}x^2+12x-18, \\ \ell:y=ax-\dfrac{1}{2}a^2. \end{cases}$$

y を消して

$$ax-\frac{1}{2}a^2=-\frac{3}{2}x^2+12x-18.$$

$$\frac{3}{2}x^2+(a-12)x+\left(18-\frac{1}{2}a^2\right)=0.$$

2倍して

$$3x^2+(2a-24)x+(36-a^2)=0$$

となる．因数分解して

$$\{x-(6-a)\}\{3x-(6+a)\}=0.$$

$$\therefore\ x=6-a,\ \frac{6+a}{3}.$$

$3x^2+(2a-24)x+(36-a^2)$

$$\begin{array}{ccc} 1 & \times & -(6-a) \\ 3 & & -(6+a) \end{array}$$

$-(6+a)-3(6-a)$

$=2a-24$

$0<a<3$ より

$$3<6-a<6,\quad 2<\frac{6+a}{3}<3$$

であり，Rの x 座標は3以上なので

$$\therefore R\left(\boxed{6}-a,\ \boxed{6}a-\frac{\boxed{3}}{\boxed{2}}a^2\right).$$

Rの x 座標 $6-a$ を

$\ell:y=ax-\dfrac{1}{2}a^2$

に代入する．よって，

$y=a(6-a)-\dfrac{1}{2}a^2$

$=6a-a^2-\dfrac{1}{2}a^2$

$=6a-\dfrac{3}{2}a^2.$

となる．

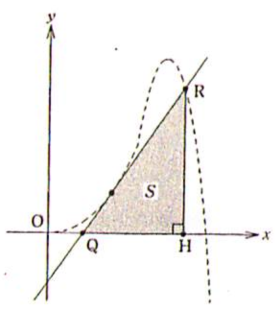
(4) (3)より

$$Q\left(\frac{1}{2}a,\ 0\right),\quad R\left(6-a,\ 6a-\frac{3}{2}a^2\right)$$

であり，これから点Hの座標は

$$H(6-a,\ 0)$$

となる．



三角形QRHの面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\cdot QH\cdot RH$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left\{(6-a)-\frac{1}{2}a\right\}\cdot\left(6a-\frac{3}{2}a^2\right)$$

$$=\frac{\boxed{9}}{\boxed{8}}a^3-\boxed{9}\,a^2+\boxed{18}\,a$$

である．

以下，ていねいに続けると次の計算になる．

$\dfrac{1}{2}\left(6-\dfrac{3}{2}a\right)\left(6a-\dfrac{3}{2}a^2\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(36a-18a^2+\dfrac{9}{4}a^3\right).$

a が，(2)の条件 $0<a<3$ の下で変化するときの S の最大値を求める．S を a で微分して，

$$S'=\frac{27}{8}a^2-18a+18$$

$$=\frac{9}{8}(a-4)(3a-4).$$

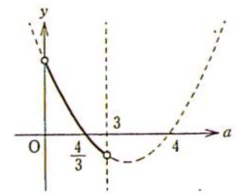
$\dfrac{9}{8}$ で，くくって，

$S'=\dfrac{9}{8}(3a^2-16a+16)$

を得る．よって，増減表は次のようになる．

a	0	…	$\frac{4}{3}$	…	3
S'		+	0	−	
S		↗	極大	↘	

$y=\dfrac{9}{8}(a-4)(3a-4)$



となって，これから，S' の符号がわかる．

よって，S は

$$a=\frac{\boxed{4}}{\boxed{3}}$$

で最大となる．