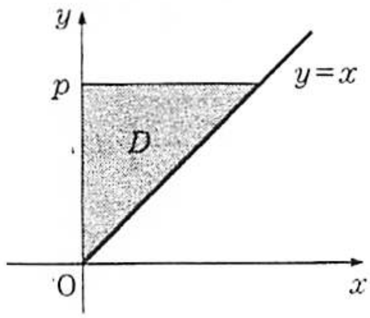
例題 705 積分順序を変更することにより，次の累次積分を計算せよ．

（1） $\displaystyle\int_0^p dx \int_x^p \sqrt{a^2y^2-x^2}\,dy$ 　　（$a \geqq 1$, $p>0$）

（2） $\displaystyle\int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{dy}{\sqrt{y^3+1}}$

【解答】（1） この累次積分は右図の領域 D：$0 \leqq x \leqq p$, $x \leqq y \leqq p$ での重積分に等しい．そこで，その重積分の値を D を横線領域 $0 \leqq y \leqq p$, $0 \leqq x \leqq y$ とみて計算すればよい．



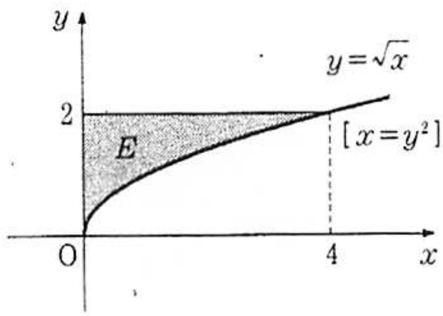
$$\int_0^p dy \int_0^y \sqrt{a^2y^2-x^2}\,dx$$

$$=\int_0^p dy\,\frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2y^2-x^2}+a^2y^2\sin^{-1}\frac{x}{ay}\right]_{x=0}^{x=y}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^p\left(\sqrt{a^2-1}+a^2\sin^{-1}\frac{1}{a}\right)y^2\,dy=\frac{1}{6}\left(\sqrt{a^2-1}+a^2\sin^{-1}\frac{1}{a}\right)p^3.$$

（2） この累次積分の積分領域は

E：$0 \leqq x \leqq 4$, $\sqrt{x} \leqq y \leqq 2$（右図）



問 706 次の累次積分の順序を変更せよ．$f(x, y)$ は考える領域で連続で，$a>0$ とする．

（1） $\displaystyle\int_0^a dx \int_0^{2x} f(x, y)\,dy$ 　　（2） $\displaystyle\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y)\,dy$

（3） $\displaystyle\int_0^1 dx \int_x^{2-x^2} f(x, y)\,dy$

岡安他著「微分積分演習」
（裳華房 2004）

第2問　2次関数

$$y=2x^2-4(a+1)x+10a+1 \quad \cdots ①$$
$$=2\{x^2-2(a+1)x\}+10a+1$$
$$=2\{x-(a+1)\}^2-2a^2+6a-1$$

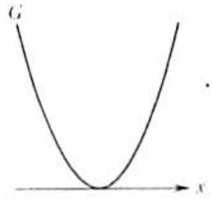
より，グラフ G の頂点の座標は

$$\left(a+\boxed{1},\ \boxed{-2}a^2+\boxed{6}a-\boxed{1}\right)$$

である．

(1)　グラフ G が x 軸と接するのは

$$(\text{頂点の } y \text{ 座標})=-2a^2+6a-1=0$$



すなわち

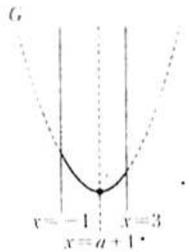
$$2a^2-6a+1=0$$

より

$$a=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-2\cdot 1}}{2}$$
$$=\frac{\boxed{3}\pm\sqrt{\boxed{7}}}{\boxed{2}}$$

のときである．

(2)　$m=-2a^2+6a-1$ となるのは，グラフ G の軸が区間に含まれるときであり



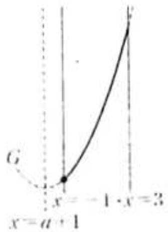
$$-1\leqq a+1\leqq 3$$

より

$$\boxed{-2}\leqq a\leqq\boxed{2}$$

のときである．

$a<-2$ すなわち $a+1<-1$ のとき，最小値 m は $x=-1$ を①に代入して



$$m=2(-1)^2-4(a+1)\cdot(-1)+10a+1$$
$$=\boxed{14}a+\boxed{7},$$

$2<a$ すなわち $3<a+1$ のとき，最小値 m は $x=3$ を①に代入して

$$m=2\cdot 3^2-4(a+1)\cdot 3+10a+1$$
$$=\boxed{-2}a+\boxed{7}$$

である．

$a<-2$ のとき，$m=\frac{7}{9}$ とすると

$$14a+7=\frac{7}{9}$$

$$a=-\frac{4}{9}$$

であるが，これは $a<-2$ に反する．

$-2\leqq a\leqq 2$ のとき，$m=\frac{7}{9}$ とすると

$$-2a^2+6a-1=\frac{7}{9}$$
$$9a^2-27a+8=0$$
$$(3a-1)(3a-8)=0$$

であり，$-2\leqq a\leqq 2$ より，$a=\frac{1}{3}$．

$2<a$ のとき，$m=\frac{7}{9}$ とすると

$$-2a+7=\frac{7}{9}$$
$$a=\frac{28}{9}$$

であり，これは $2<a$ を満たす．

以上より，$m=\frac{7}{9}$ となるのは

$$a=\frac{\boxed{1}}{\boxed{3}},\ \frac{\boxed{28}}{\boxed{9}}$$

のときである．

河合塾
センター試験過去問
レビュー
数学Ⅰ·A，Ⅱ·B