第1問　指数関数・対数関数，三角関数，微分法

〔1〕

(1)
$$(2^x+3^x)\left(\frac{9}{2^x}+\frac{4}{3^x}\right)=a \quad \cdots①$$

より

$$\left\{1+\left(\frac{3}{2}\right)^x\right\}\left\{9+\frac{4}{\left(\frac{3}{2}\right)^x}\right\}=a.$$

$X=\left(\frac{3}{2}\right)^x$ とおけば

$$(1+X)\left(9+\frac{4}{X}\right)=a$$

$$\boxed{9}X+\frac{\boxed{4}}{X}+\boxed{13}=a \quad \cdots②$$

$$9X^2-(a-13)X+4=0.$$

ここで，$f(X)=9X^2-(a-13)X+4$ とおくと

$$f(X)=9\left(X^2-\frac{a-13}{9}X\right)+4$$
$$=9\left(X-\frac{a-13}{18}\right)^2-\frac{(a-13)^2}{36}+4$$
$$=9\left(X-\frac{a-13}{18}\right)^2-\frac{a^2-26a+25}{36}.$$

である．方程式②が異なる二つの正の解をもつ条件は

$$\begin{cases} f\left(\frac{a-13}{18}\right)=-\frac{a^2-26a+25}{36}<0, \\ \frac{a-13}{18}>0 \end{cases}$$

を満たすことである．これより

$$\begin{cases} (a-1)(a-25)>0, \\ a-13>0 \end{cases}$$

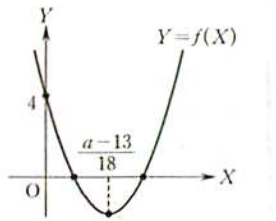
すなわち

$$a>\boxed{25}$$

である．このときの方程式②の2解を X_1, X_2 とし，$X_1=\left(\frac{3}{2}\right)^{x_1}$, $X_2=\left(\frac{3}{2}\right)^{x_2}$ とすると，x_1, x_2 は方程式①の2解である．さらに

$$x_1+x_2=\log_{\frac{3}{2}}X_1+\log_{\frac{3}{2}}X_2$$
$$=\log_{\frac{3}{2}}X_1X_2$$
$$=\log_{\frac{3}{2}}\frac{4}{9}$$
$$=\boxed{-2}$$

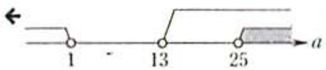
河合塾
大学入試センター試験
過去問レビュー
(2010，河合出版)



$Y=f(X)$ が下に凸の放物線であり $f(0)=4>0$ であるから

$$\begin{cases} (\text{頂点の }Y\text{ 座標})<0, \\ \text{軸 } X=\frac{a-13}{18}>0 \end{cases}$$

となればよい．



$9X^2-(a-13)X+4=0$ の2解が X_1, X_2 であるから

$$X_1X_2=\frac{4}{9}.$$

$\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$ より

$$\log_{\frac{3}{2}}\frac{4}{9}=-2.$$

となる．

(2)　$a=50$ のとき，$f(X)=0$ より

$$9X^2-37X+4=0$$

すなわち

$$(X-4)(9X-1)=0$$

であるから，方程式②の解は

$$X=\boxed{4},\ \frac{\boxed{1}}{\boxed{9}}$$

である．$X=4$ のとき

$$x=\log_{\frac{3}{2}}4$$
$$=\frac{\log_2 4}{\log_2\frac{3}{2}}$$
$$=\frac{\boxed{2}}{\log_2 3-\boxed{1}}$$

であり，$X=\frac{1}{9}$ のとき

$$x=\log_{\frac{3}{2}}\frac{1}{9}$$
$$=\frac{\log_2\frac{1}{9}}{\log_2\frac{3}{2}}$$
$$=\frac{\boxed{-2}\log_2 3}{\log_2 3-1}$$

である．

←底の変換公式

$a>0$, $a\neq1$, $b>0$, $c>0$, $c\neq1$ のとき

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

← $\log_2\frac{1}{9}=\log_2 3^{-2}=-2\log_2 3.$