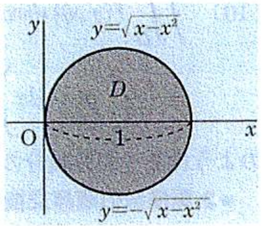
**例題 1** ——— **2 重積分 (1)**

(1) つぎの 2 重積分を求めよ．

$$\iint_D \sqrt{x}\,dx\,dy, \quad D: x^2+y^2 \leqq x$$

(2) $f(x,y)=1$ のとき，$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ は $D$ の面積に等しいことを示せ．

**解答** (1) $x^2+y^2=x$ は $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$ と変形することによって，中心が $(1/2,0)$ で半径が $1/2$ の円である．$D$ はこの円の周および内部である．この $D$ を $x$ に関する単純な領域と考える（p.86）．よって，




$$I=\iint_D \sqrt{x}\,dx\,dy=\int_0^1 dx\int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} \sqrt{x}\,dy$$

$$=\int_0^1 [\sqrt{x}y]_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}}\,dx$$

$$=2\int_0^1 \sqrt{x}\sqrt{x-x^2}\,dx=2\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx$$

いま，$\sqrt{1-x}=t$ とおくと，$x=1-t^2$, $dx=-2t\,dt$．よって

$$2\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx=2\int_1^0 (1-t^2)t(-2t)dt$$

$$=4\int_0^1 (t^2-t^4)dt=4\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}\right]_0^1=\frac{8}{15}$$

(2) p.85 の 2 重積分の定義(1)により，$f(x,y)=1$ のとき $f(x_i,y_i)\Delta S_i=\Delta S_i$ である．よって

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^n f(x_i,y_i)\Delta S_i=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^n \Delta S_i=D\text{ の面積}$$

**問題**

**1.1** つぎの 2 重積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{x}{x^2+y^2}\,dx\,dy, \quad D: y-\frac{1}{4}x^2 \geqq 0,\ y-x \leqq 0,\ x \geqq 2$

(2) $\displaystyle\iint_D \sqrt{xy-y^2}\,dx\,dy, \quad D: 0 \leqq y \leqq 1,\ y \leqq x \leqq 10y$

寺田文行, 坂田泩, "演習と応用 微分積分"
(サイエンス社, 2000)



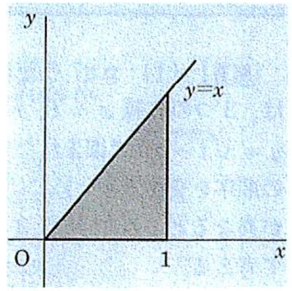
**例題 2** ——— **2 重積分 (2)**

(1) つぎの 2 重積分を計算せよ．

$$\iint_D \sqrt{4x^2-y^2}\,dx\,dy, \quad D: 0 \leqq y \leqq x \leqq 1$$

(2) 曲面 $z=e^{px+qy}$ $(pq \neq 0)$
が $xy$ 平面の正方形 $D=\{(x,y): 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1\}$ との間につくる立体の体積を求めよ．

**解答** (1) 右図を $x$ に関する単純な領域とみる．p.35 の不定積分の公式(7)より，




$$I=\int_0^1 dx\int_0^x \sqrt{4x^2-y^2}dy$$

$$=\int_0^1 \left[\frac{y}{2}\sqrt{4x^2-y^2}+\frac{4x^2}{2}\sin^{-1}\frac{y}{2x}\right]_0^x dx$$

$$=\int_0^1 \left(\frac{x}{2}\sqrt{3x^2}+2x^2\sin^{-1}\frac{1}{2}\right)dx$$

$$=\int_0^1 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x^2+2x^2\frac{\pi}{6}\right)dx=\left[\frac{\sqrt{3}}{6}x^3+\frac{\pi}{3}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$$

(2) $I=\iint_D e^{px}\cdot e^{qy}\,dx\,dy$ で変数に関して分離された形である．p.87 の(10)より

$$I=\left(\int_0^1 e^{px}dx\right)\left(\int_0^1 e^{qy}dy\right)=\left[\frac{e^{px}}{p}\right]_0^1\cdot\left[\frac{e^{qx}}{q}\right]_0^1=\frac{e^p-1}{p}\cdot\frac{e^q-1}{q}$$

**問題**

**2.1** つぎの 2 重積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D \log\frac{x}{y^2}\,dx\,dy, \quad D: 1 \leqq y \leqq x \leqq 2$

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi}\left\{\int_0^{1+\cos\theta} r^2\sin\theta\,dr\right\}d\theta$ （p.65 の図を参照）

(3) $\displaystyle\iint_D y\,dx\,dy, \quad D: \sqrt{x}+\sqrt{y} \leqq 1$ （p.53 の上図を参照）

**例題 9** ―― 関数の導関数 (1)

つぎの関数の導関数を求めよ．

(1) $y=\sqrt[3]{(x^2+1)^2}$ (2) $y=\cos(\sin x)$

(3) $y=e^{x^x}$ $(x>0)$ (4) $y=\cos^{-1}\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

**解答** (1) $y=\sqrt[3]{(x^2+1)^2}=(x^2+1)^{2/3}$

$$y'=\frac{2}{3}(x^2+1)^{-1/3}\cdot 2x=\frac{4}{3}\frac{x}{\sqrt[3]{(x^2+1)}}$$

(2) $u=\sin x$ とおくと，$y=\cos u$．p.16 の定理 16（合成関数の導関数）より

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=-\sin u\cdot\cos x=-\sin(\sin x)\cdot\cos x$$

(3) $y=e^{x^x}(x>0)$ は $y=e^{(x^x)}$ という意味である．この両辺の対数をとると $\log y=x^x$．この両辺を $x$ で微分すると $y'/y=(x^x)'$ となる．

$u=x^x$ とおき，$u'$ を求める．そのためこの両辺の対数をとると $\log u=x\log x$．この両辺を $x$ で微分すると $u'/u=\log x+1$．よって $u'=x^x(\log x+1)$．

$$\therefore\quad y'=e^{x^x}\cdot x^x(\log x+1)$$

(4) $$y'=-\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2}}\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$$

$$=-\frac{x^2+1}{2x}\frac{2x(x^2+1)-2x(x^2-1)}{(x^2+1)}=-\frac{2}{x^2+1}\quad(x>0)$$

**問 題**

**9.1** つぎの関数の導関数を求めよ．

(1) $e^{x^2}$ (2) $x^2\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}$ $(-1<x<1,\ x\neq 0)$

(3) $\sqrt{x^2+1}\sqrt[3]{x^3+1}$ (4) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ (5) $\dfrac{x}{x-\sqrt{x^2+a^2}}$ $(a>0)$

(6) $(\tan x)^{\sin x}$ $(0<x<\pi/2)$ (7) $\log(x+\sqrt{x^2+1})$

**9.2** つぎの関数の導関数を求めよ．

(1) $y=\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\tan\dfrac{x}{2}\right)$ (2) $y=\cos^{-1}\dfrac{4+5\cos x}{5+4\cos x}$

(3) $y=\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$



**例題 10** ―― 関数の導関数 (2)

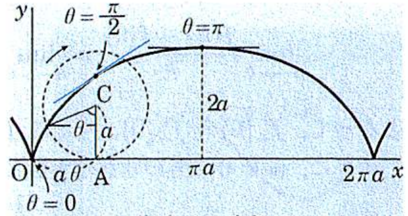
サイクロイド $\left.\begin{array}{l}x=a(\theta-\sin\theta)\\ y=a(1-\cos\theta)\end{array}\right\}$ 上の $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ における接線の方程式を求めよ．ただし $a>0$ とする．

**解答** p.17 の定理 18（媒介変数を用いて表される関数の導関数）を用いる．

$$\frac{dx}{d\theta}=a(1-\cos\theta),\qquad\frac{dy}{d\theta}=a\sin\theta$$

よって，$$\frac{dy}{dx}=\frac{a\sin\theta}{a(1-\cos\theta)}$$

$$=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}=\cot\frac{\theta}{2}$$



サイクロイド

$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のときは

$$x=\left(\frac{\pi}{2}-1\right)a,\quad y=a,\quad\frac{dy}{dx}=\cot\frac{\pi}{4}=1$$

したがって，接線の方程式は

$$y-a=1\cdot\left\{x-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)a\right\}\quad よって,\quad y=x+\left(2-\frac{\pi}{2}\right)a$$

**問 題**

**10.1** つぎの関係から $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ（結果は $t$ の関数のままでよい）．

(1) $\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t\end{cases}$ $(a>0)$ (2) $\begin{cases}x=\dfrac{3t}{1+t^3}\\ y=\dfrac{3t^2}{1+t^3}\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x=1-t^2\\ y=t^3\end{cases}$ (4) $\begin{cases}x=a(\cos t+t\sin t)\\ y=a(\sin t-t\cos t)\end{cases}$ $(a>0)$

**10.2** 双曲線関数 $\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$, $\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\tanh x=\dfrac{\sinh x}{\cosh x}$ の導関数を求めよ．

寺田文行・坂田泩，"演習と応用 微分積分"
(サイエンス社，2000)

楽勝.



**例題 2** ——— **表現行列**

$\boldsymbol{R}^3$ から $\boldsymbol{R}^2$ への線形写像 $f$ によって

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_1 &= (1,0,-1) &\longmapsto\quad &(0,1) &= \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 &= (-1,1,1) &\longmapsto\quad &(2,0) &= \boldsymbol{b}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 &= (0,-1,1) &\longmapsto\quad &(-3,1) &= \boldsymbol{b}_3 \end{aligned}$$

に写像されるとき，$f$ の表現行列を求めよ．また，$\boldsymbol{x} = (1,-1,2)$ のとき，$\boldsymbol{x}$ の像 $f(\boldsymbol{x})$ を求めよ．

**解答**　$A$ を $f$ の表現行列とする．数ベクトルを列ベクトルとみなすと

$$A\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{b}_1,\quad A\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{b}_2,\quad A\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{b}_3$$

だから，まとめて

$$A[\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3] = [\boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2\ \boldsymbol{b}_3]$$

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

| $[\boldsymbol{a}_1$ | $\boldsymbol{a}_2$ | $\boldsymbol{a}_3]$ | $E$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | −1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | −1 | 0 | 1 | 0 |
| −1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | −1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | −1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 2 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |

また，

$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

だから

$$f(\boldsymbol{x}) = (-5, 6)$$

**問　題**

**2.1**　$\boldsymbol{R}^4$ の標準的な基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4$ に対して

$$f(\boldsymbol{e}_1) = (1,-1),\quad f(\boldsymbol{e}_2) = (2,0),\quad f(\boldsymbol{e}_3) = (-1,1),\quad f(\boldsymbol{e}_4) = (0,1)$$

となる線形写像 $f : \boldsymbol{R}^4 \longrightarrow \boldsymbol{R}^2$ に対応する表現行列を求め，$\boldsymbol{x} = (3,1,-1,2)$ の像を求めよ．

**2.2**　$f : \boldsymbol{R}^3 \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$ によって

$$(-1,0,2) \longmapsto (-5,0,3),\quad (0,1,1) \longmapsto (0,1,6),$$
$$(3,-1,0) \longmapsto (-5,-1,9)$$

に写像されるとき $f$ の表現行列を求めよ．

寺田文行・木村宣昭, "演習と応用 線形代数"
(サイエンス社, 2000)



**例題 3** ——— **線形写像の和・合成**

平面において，直交座標系 $\{\mathrm{O}; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ が定められているとする．$f$ を $y$ 軸への正射影，$g$ を $y = x$ に関する対称移動を表す線形変換とする．このとき $f+g$，$g \circ f$ および $f \circ g$ によってベクトル $\boldsymbol{a} = (2,1)$ はどこに写像されるか．

**解答**　$f(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{0} = (0,\ 0)$，$f(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{e}_2 = (0,\ 1)$ だから $f$ の表現行列は $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$g(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{e}_2 = (0,\ 1)$，$g(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{e}_1 = (1,\ 0)$ だから $g$ の表現行列は $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ である．$f+g$, $g \circ f$, $f \circ g$ の表現行列はそれぞれ

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ BA &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ AB &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

である．

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

だから，$f+g$, $g \circ f$, $f \circ g$ によってベクトル $\boldsymbol{a} = (2,1)$ はそれぞれ $(1,3)$, $(1,0)$, $(0,2)$ に写像される．

**問　題**

**3.1**　$f, g$ をつぎのような平面の線形変換とするとき $f+g$, $g \circ f$ および $f \circ g$ に対応する表現行列を求めよ．

(a) $\begin{cases} f : y = x \text{ に関する対称移動} \\ g : x \text{ 軸への正射影} \end{cases}$　(b) $\begin{cases} f : y = -3x \text{ に関する対称移動} \\ g : \text{原点のまわりの } -\dfrac{\pi}{4} \text{ の回転} \end{cases}$

(c) $\begin{cases} f : \text{原点のまわりの } \dfrac{\pi}{6} \text{ の回転} \\ g : \text{相似比 } 2 \text{ の相似変換} \end{cases}$　(d) $\begin{cases} f : y = x \text{ への正射影} \\ g : \text{原点のまわりの } \dfrac{\pi}{3} \text{ の回転} \end{cases}$

**例題 8**　　**対角化**

行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ が対角化可能ならば変換の行列を求めて対角化せよ．

**解答**　$A$ の固有多項式は

$$\varphi(t) = |A - tE| = \begin{vmatrix} 2-t & 1 & 1 \\ 1 & 2-t & 1 \\ 0 & 0 & 1-t \end{vmatrix} = (1-t)^2(3-t)$$

だから，固有値は $1, 3$ で代数的重複度はそれぞれ $2, 1$ である．
右表から $\mathrm{rank}\,(A-E) = 1$ だから固有値 1 に対する固有空間 $V(1)$ の次元（幾何的重複度）は $\dim V(1) = 3 - \mathrm{rank}\,(A-E) = 3 - 1 = 2$ で代数的重複度に一致する．
固有値 3 に関しては代数的重複度は 1 だから固有空間 $V(3)$ の次元も 1 である．各固有値に対して幾何的重複度と代数的重複度が一致するから $A$ は対角化可能である．

| $A-E$ | | | $A-3E$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | −1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | −1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | −2 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | −1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

固有値 1 に対する固有空間 $V(1)$ は表から

$$V(1) = L\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\}, \quad \boldsymbol{x}_1 = {}^t[-1\ \ 1\ \ 0], \quad \boldsymbol{x}_2 = {}^t[-1\ \ 0\ \ 1]$$

で $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ が $V(1)$ の 1 組の基底である．
固有値 3 に対する固有空間 $V(3)$ に関しても表から

$$V(1) = L\{\boldsymbol{x}_3\}, \quad \boldsymbol{x}_3 = {}^t[1\ \ 1\ \ 0]$$

で $\boldsymbol{x}_3$ が $V(3)$ の基底である．

よって，$P = [\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2\ \boldsymbol{x}_3]$ とおくと $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ となる．

**注意**　$\boldsymbol{R}^3 = V(1) \oplus V(3)$ である．

**問　題**

**8.1**　つぎの行列 $A$ が対角化可能ならば対角化せよ．

(a) $\begin{bmatrix} 7 & 6 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}$　　(b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -7 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$　　(c) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 6 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

寺田文行・木村宣昭 "演習と応用 線形代数"
(サイエンス社, 2000)



**例題 9**　　**べき零行列の対角化**

$A$ がべき零行列で，$A \neq O$ とすると，$A$ は対角化可能でないことを示せ．

**解答**　$A$ が対角化可能であるとすると

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \text{は } A \text{ の固有値})$$

となる正則行列 $P$ が存在する．$A$ がべき零行列だから $A^k = O$ として，上式を $k$ 乗すると

$$(P^{-1}AP)^k = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & & 0 \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

一方

$$(P^{-1}AP)^k = \overbrace{P^{-1}AP\,P^{-1}AP\,P^{-1}AP \cdots P^{-1}AP}^{k\text{ 個}} = P^{-1}A^kP = P^{-1}OP = O$$

だから

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$$

よって，

$$A = POP^{-1} = O$$

であるがこれは仮定に反する．

**問　題**

**9.1**　$A^2 = A$ ならば対角化可能で，$\mathrm{tr}\,A = \mathrm{rank}\,A$ であることを示せ．

**9.2**　(a)　$n$ 次正方行列 $A$ が相異なる $n$ 個の正の固有値をもつとする．このとき，$B^2 = A$ となる正方行列 $B$ が存在することを示せ．

(b)　$A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ に対し $B^2 = A$ となる $B$ を求めよ．